

Contrôle Partiel du Jeudi 26 mars 2026

Durée : 2h

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.
Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 (6 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur \mathbb{R}^+ .
2. En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}^+ .
3. Soit $a > 0$. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[a, +\infty[$.
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

Exercice 2 (7 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ .
2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}^+ .
3. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .

Dans la suite, on notera $S := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ sur \mathbb{R}^+ .

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.
5. Montrer que S est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ et déterminer sa dérivée.

Exercice 3 (6 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x) = \frac{n^3}{n^2 + 1} x e^{-nx}$.

On pose $S := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. Montrer que le domaine de définition de S est \mathbb{R}^+ .
2. Etudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R}^+ .
3. a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $|R_n(\frac{1}{n})| \geq \frac{(n+1)^3}{4n^2+1} e^{-2}$, où R_n désigne le reste d'ordre n de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R}^+ .
Indication : on pourra commencer par minorer $|R_n(\frac{1}{n})|$ par une somme allant de $n+1$ à $2n$.
b) En déduire que $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 4 (3 points)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

- a) $\sum_n (1+i)^n z^n$ b) $\sum_n \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$ c) $\sum_n \arctan\left(\frac{1}{n^2-3}\right) z^n$.

Exercice 1 :1. **Convergence simple :** Soit $x \in \mathbb{R}^+$.i) Si $x = 0$, on a pour tout $n \geq 1$, $f_n(0) = 1$ Ainsi, $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.ii) Si $x > 0$, comme $1 + x^2 > 1$, $(1 + x^2)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, et donc $f_n(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.Par suite, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers la fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} .$$

2. **Non convergence uniforme :** La fonction limite f n'est pas continue car pas continue en 0, ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$) alors que les f_n sont continues, ce qui ne pourrait pas avoir lieu s'il y avait convergence uniforme d'après le Théorème de continuité. (Une limite uniforme de fonctions continues étant continue.) On obtient donc que (f_n) ne converge pas uniformément vers f .3. **Convergence uniforme sur $[a, +\infty[$:** Soit $a > 0$. On a

$$\forall n \geq 1, 0 \leq \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [a, +\infty[} f_n(x) = \sup_{x \in [a, +\infty[} \frac{1}{(1 + x^2)^n} = \frac{1}{(1 + a^2)^n} = f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

où on a utilisé le fait $x \mapsto \frac{1}{(1 + x^2)^n}$ est décroissante sur \mathbb{R}^+ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) = 0$ d'après 1.Par suite, $(f_n)_n$ CVU vers $f = 0$ sur $[a, +\infty[$.4. **Calcul d'une limite d'intégrale :** Dans le cours il y a deux théorèmes d'interversion limite intégrale, mais un qui ne marche que sur un segment, donc on utilise l'autre : le théorème de convergence dominée. On a :(i) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue (donc continue par morceaux) car quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}^+ ;(ii) la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers f qui est continue par morceaux car continue sauf en 0 ;(iii) il faut maintenant vérifier l'hypothèse de domination : On a $\forall n \geq 1$,

$$\forall x \geq 0, |f_n(x)| = \frac{1}{(1 + x^2)^n} \leq \frac{1}{1 + x^2} := g(x)$$

avec g continue et intégrable sur \mathbb{R}^+ .En effet, $0 \leq \int_0^{+\infty} g(x) dx = [\arctan x]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty$.

Par suite, d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0.$$

Exercice 2 : Considérons la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ dont le terme général est défini sur \mathbb{R}^+ , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par la formule $f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2}$.1. **Convergence simple :** Soit $x \in \mathbb{R}^+$.La série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est une série alternée car pour tout $n \geq 1$, $(-1)^n f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2} \geq 0$.De plus, $|f_n(x)| = \frac{x}{n^2 + x^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et la suite $(|f_n(x)|)_{n \geq 1}$ est décroissante.En effet, $\forall n \geq 1$, comme $0 < n^2 + x^2 < (n + 1)^2 + x^2$, car $u \mapsto u^2$ est croissante sur \mathbb{R}^+ , on a alors $0 < \frac{1}{(n+1)^2 + x^2} < \frac{1}{n^2 + x^2}$. En multipliant par $x \geq 0$, on obtient

$$\forall n \geq 1, 0 \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x}{(n + 1)^2 + x^2} \leq |f_n(x)| = \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

D'où $(|f_n(x)|)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Par suite, d'après le CSSA, la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge pour tout $x \geq 0$ et donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ CVS sur \mathbb{R}^+ et on a de plus pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$ et donc

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \sup_{x \geq 0} |R_n(x)| \leq \sup_{x \geq 0} |f_{n+1}(x)|. \quad (1)$$

Remarque : On aurait pu montrer ici la convergence absolue de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R}^+ puis déduire la convergence simple de la série de fonctions mais dans tous les cas, on aurait eu besoin d'appliquer le CSSA pour avoir l'estimation (1) pour montrer la convergence uniforme dans 3.

2. Non convergence normale :

1ère méthode :

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \sup_{x \geq 0} \frac{x}{n^2 + x^2} := \sup_{x \geq 0} g_n(x)$$

où la fonction $g_n = |f_n|$ est C^1 sur \mathbb{R}^+ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad g'_n(x) = \frac{n^2 + x^2 - x(2x)}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}.$$

Comme, pour tout $x \geq 0$, $n^2 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq n^2 \iff x \leq n$, on a alors

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = g_n(n) = \frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Par suite $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge car série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$ et donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}^+ .

2ème méthode : Posons pour tout $n \geq 1$, $x_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}^+$. On a

$$\sum_{n \geq 1} f_n(x_n) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n} \quad \text{diverge} \quad (2)$$

car série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$.

Comme,

$$\forall n \geq 1, \quad \sup_{x \geq 0} |f_n(x)| \geq |f_n(x_n)|,$$

on déduit de (2) que $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \geq 0} |f_n(x)|$ diverge et donc que $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}^+ .

3. Convergence uniforme :

Comme $\sum_{n \geq 1} f_n$ CVS sur \mathbb{R}^+ (d'après 1.), montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ CVU sur

\mathbb{R}^+ revient à montrer que la suite des fonctions reste $(R_n)_{n \geq 1}$ CVU vers la fonction nulle sur \mathbb{R}^+ . D'après (1), il suffit de montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ CVU vers la fonction nulle sur \mathbb{R}^+ .

Or d'après 2), 1ère méthode,

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On déduit alors que $(f_n)_{n \geq 1}$ CVU vers la fonction nulle sur \mathbb{R}^+ et donc, d'après (1), $(R_n)_{n \geq 1}$ CVU vers la fonction nulle sur \mathbb{R}^+ .

Par suite, $\sum_{n \geq 1} f_n$ CVU sur \mathbb{R}^+ .

4. Limite de la somme en l'infini :

1ère méthode :

On va appliquer le théorème d'interversion de somme et limite.

Considérons $A := \mathbb{R}^+$ non majorée, on peut donc essayer d'appliquer ce théorème pour trouver la limite de S en $+\infty$.

i) Montrons que $\forall n \geq 1$, f_n admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \geq 0, |f_{n_0}(x)| = \frac{x}{n_0^2 + x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

Par suite, $\forall n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, finie.

ii) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $A = \mathbb{R}^+$.

Par suite, d'après le théorème d'interversion de somme et limite, S admet une limite finie en $+\infty$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

2ème méthode :

On a pour tout $n \geq 1$, $S = S_n + R_n$ sur \mathbb{R}^+ , donc en particulier pour $n = 0$,

$$S = S_0 + R_0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+.$$

On a alors, en particulier, $\forall x > 0$, $S(x) = S_0(x) + R_0(x) = f_0(x) + R_0(x) = \frac{1}{x} + R_0(x)$ avec

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et d'après le CSSA,

$$\forall x > 0, 0 \leq |R_0(x)| \leq |f_1(x)| = \frac{x}{1+x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} R_0(x) = 0$.

Par suite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} R_0(x) = 0$.

5. Caractère C^1 de la somme :

On va utiliser le théorème de classe C^1 des séries de fonctions. Vérifions les hypothèses :

i) On a pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ car quotient de fonctions polynomiales donc C^1 sur \mathbb{R}^+ avec le dénominateur qui ne s'annule pas sur \mathbb{R}^+ . Et on a

$$\forall x \geq 0, f'_n(x) = (-1)^n \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}.$$

ii) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ d'après 1.

iii) Montrons que la série des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ . Pour cela on va montrer que $\sum f'_n$ converge normalement sur \mathbb{R}^+ ($CVN \Rightarrow CVU$).

On a

$$\forall n \geq 1, 0 \leq \sup_{x \geq 0} |f'_n(x)| = \sup_{x \geq 0} \frac{|n^2 - x^2|}{(n^2 + x^2)^2} \leq \sup_{x \geq 0} \frac{n^2 + x^2}{(n^2 + x^2)^2} = \sup_{x \geq 0} \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad (3)$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire dans la première inégalité, et le fait que $x^2 \geq 0$ dans la dernière.

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (3) que $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \geq 0} |f'_n(x)|$

converge ce qui n'est autre que la convergence normale de $\sum_{n \geq 1} f'_n$ sur \mathbb{R}^+ .

On a alors en particulier que $\sum_{n \geq 1} f'_n$ CVU sur \mathbb{R}^+ et donc sur tout segment de \mathbb{R}^+ .

Par suite, d'après le théorème des séries de fonctions de classe C^1 , S est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right)' (x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}.$$

Exercice 3 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x) = \frac{n^3}{n^2 + 1} x e^{-nx}$.

On pose $S := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n le reste d'ordre n de cette série de fonctions.

1. Montrons que $D_S = \mathbb{R}^+$. On a pour tout $n \geq 1$, f_n est bien définie sur \mathbb{R} .
Etudions maintenant la CVS de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- i) Si $x < 0$, on a

$$\forall n \geq 1, f_n(x) = \frac{n^3}{n^2 + 1} x e^{-nx} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n x e^{-nx} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} = +\infty$.

Par suite, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.

- ii) Si $x = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$ et donc $\sum_{n \geq 1} f_n(0) = 0$ converge.

- iii) Si $x > 0$, on a

$$\forall n \geq 1, 0 \leq f_n(x) = \frac{n^3}{n^2 + 1} x e^{-nx} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (4)$$

car $\lim_n n^2 f(x) = \lim_n \frac{n^5}{n^2 + 1} x e^{-nx} = \lim_n \frac{n^3 x}{e^{nx}} = 0$ par croissance comparée.

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$, on déduit alors de (4)

que $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Ainsi, le domaine de définition de S est bien \mathbb{R}^+ .

2. **1ère façon :** Posons pour tout $n \geq 1$, $x_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}^+$.

On a pour tout $n \geq 1$, $|f_n(x_n)| = \frac{n^3}{n^3 + n} e^{-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^3} e^{-1} = e^{-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e^{-1} \neq 0$.

Comme

$$\forall n \geq 1, \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| \geq |f_n(x_n)|,$$

on déduit alors que $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| \not\rightarrow 0$ et donc $(f_n)_n$ ne CVU pas vers la fonction nulle sur \mathbb{R}^+ .

Par suite, $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement (ni uniformément) sur \mathbb{R}^+ .

2ème façon :

On a pour

$$\forall n \geq 1, \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \frac{n^3}{n^2 + 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^+} x e^{-nx}.$$

On a pour tout $n \geq 1$, $h_n : x \mapsto x e^{-nx}$ est C^1 sur \mathbb{R}^+ avec pour tout $x \geq 0$, $h_n'(x) = e^{-nx}(1 - nx)$.

On a ainsi, pour tout $x \geq 0$, $h_n'(x) \geq 0 \iff 1 - nx \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{n}$. On en déduit que

$\sup_{x \geq 0} h_n(x) = h_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} e^{-1}$ et par suite

$$\forall n \geq 1, \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \frac{n^2}{n^2 + 1} e^{-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e^{-1} \neq 0$$

et donc $(f_n)_n$ ne CVU pas vers la fonction nulle sur \mathbb{R}^+ .

Par suite, $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement (ni uniformément) sur \mathbb{R}^+ .

3. On va montrer par une autre méthode que dans 2. que $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur

\mathbb{R}^+ .

a) On a pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left| R_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k^3}{n(k^2+1)} e^{-\frac{k}{n}} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k^3}{n(k^2+1)} e^{-\frac{k}{n}} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(n+1)^3}{((2n)^2+1)} e^{-\frac{2n}{n}} \\ &\geq \frac{1}{n} \frac{(n+1)^3}{4n^2+1} e^{-2} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} 1 \right) \\ &\geq \frac{(n+1)^3}{4n^2+1} e^{-2}, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que les termes de la suite sont positifs, que $n+1 \leq k \leq 2n$ et que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} 1 = n.$$

b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3}{4n^2+1} e^{-2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{4n^2} e^{-2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{4} e^{-2} = +\infty \neq 0$, on déduit de a) que $|R_n(\frac{1}{n})| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. D'autre part, comme

$$\forall n \geq 1, \sup_{x \geq 0} |R_n(x)| \geq |R_n(\frac{1}{n})| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

on déduit que $\sup_{x \geq 0} |R_n(x)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et donc que $(R_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la

fonction nulle sur \mathbb{R}^+ .

Par suite, $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 4 :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = (1+i)^n$, et ainsi $|a_n|^{\frac{1}{n}} = |1+i| = \sqrt{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l = \sqrt{2}$, donc, d'après le critère de Cauchy, le rayon de convergence vaut $R = \frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3} \neq 0$, alors

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \frac{(n!)^3}{((n+1)!)^3} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{27n^3}{n^3} = 27 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l = 27$$

On en déduit, d'après le critère de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série vaut

$$R = \frac{1}{l} = \frac{1}{27}.$$

c) Comme $\arctan x \sim_0 x$, on a alors

$$\arctan \left(\frac{1}{n^2-3} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2-3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi, d'après le cours, le rayon de convergence de la série étudiée est le même que celui de $\sum_n n^{-2} z^n$. Or, toujours d'après le cours, $\sum_n n^{-2} z^n$ et $\sum_n z^n$ ont même rayon de convergence, qui vaut donc $R = 1$.