

Chapitre 5

Intégrales multiples

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

5.1 Intégrales doubles

Considérons une fonction de deux variables $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ continue, et une région D du plan \mathbb{R}^2 , bornée et contenue dans A .

Nous voulons définir l'intégrale de la fonction f sur D . Pour cela, nous allons utiliser ce que nous connaissons déjà : les intégrales de fonctions d'une variable.

Autrement dit, on va d'abord intégrer f par rapport à la variable x , en considérant la variable y comme un paramètre. Le résultat de cette première intégration dépendra de la valeur du "paramètre" y . On intégrera alors ce résultat par rapport à y .

Bien entendu, on pourra faire la même chose en échangeant les rôles de x et de y ; nous verrons que cela donne le même résultat.

Une des difficultés est de tenir compte de la géométrie de D qui peut être un polygone quelconque, ou un disque, ou la région délimitée par une courbe fermée très compliquée...

Fixer la valeur de la variable y et intégrer par rapport à x revient à découper D en tranches horizontales; fixer la valeur de la variable x et intégrer par rapport à y revient à découper D en tranches verticales.

5.1.1 Théorème de Fubini



Définition 1

On appelle pavé de \mathbb{R}^2 toute partie P de \mathbb{R}^2 de la forme $P = [a, b] \times [c, d]$ avec $a < b$ et $c < d$. En d'autres termes, un pavé de \mathbb{R}^2 est un produit de deux segments de \mathbb{R} .

★ Théorème 1

(Théorème de Fubini, admis) Soit $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur le pavé $[a, b] \times [c, d]$. Alors les fonctions

$$\begin{aligned} [a, b] &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_{y=c}^{y=d} f(x, y) dy \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [c, d] &\rightarrow \mathbb{K} \\ y &\mapsto \int_{x=a}^{x=b} f(x, y) dx \end{aligned}$$

sont continues et on a

$$\int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x, y) dy \right) dx = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x, y) dx \right) dy.$$

La valeur commune de ces deux intégrales est appelée intégrale double de f sur le pavé $P := [a, b] \times [c, d]$ et est notée

$$\iint_P f \quad \text{ou} \quad \iint_P f(x, y) dx dy.$$

★ Corollaire 1

Soit $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction à variables séparées, c'est-à-dire qu'il existe $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$, $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{K}$ telles que

$$\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d], f(x, y) = g(x)h(y).$$

On suppose que g et h sont continues sur $[a, b]$ et $[c, d]$ respectivement, alors

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right).$$

Exercice 1

Calculer l'intégrale de la fonction $f : (x, y) \mapsto xy^2$ sur le pavé $P = [0, 1] \times [1, 2]$.

Correction de l'exercice 1 :

On a f est une fonction à variables séparées avec $\forall (x, y) \in [0, 1] \times [1, 2]$, $f(x, y) = g(x)h(y)$ avec $g : x \mapsto x$ continue sur $[0, 1]$ et $h : y \mapsto y^2$ continue sur $[1, 2]$. Par suite, d'après le

Corollaire 1,

$$\begin{aligned} \iint_{[0,1] \times [1,2]} f(x,y) dx dy &= \left(\int_0^1 x dx \right) \left(\int_1^2 y^2 dy \right) \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^1 \times \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=1}^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

★ Théorème 2

(Extension aux fonctions continues par morceaux) Soit $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction bornée. On suppose que

- i) $\forall x \in [a, b]$, la fonction $f(x, \cdot) : y \mapsto f(x, y)$ est continue par morceaux sur $[c, d]$,
 - ii) $\forall y \in [c, d]$, la fonction $f(\cdot, y) : x \mapsto f(x, y)$ est continue par morceaux sur $[a, b]$,
- alors on a l'égalité

$$\int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x, y) dy \right) dx = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x, y) dx \right) dy.$$

Cette valeur commune est encore appelée l'intégrale double de f sur $[a, b] \times [c, d]$ et est notée $\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy$.

5.1.2 Généralisation aux parties élémentaires, simples

Définition 2

Une partie A de \mathbb{R}^2 est dite élémentaire s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $c < d$ et des fonctions φ_1, φ_2 continues sur $[a, b]$ et ψ_1, ψ_2 continues sur $[c, d]$ telles que $\varphi_1 \leq \varphi_2$ sur $[a, b]$ et $\psi_1 \leq \psi_2$ sur $[c, d]$ et

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'intérieur de A est

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c < y < d, \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}. \end{aligned}$$

Exemple :

1. Le pavé $[a, b] \times [c, d]$ avec $a < b$ et $c < d$ est une partie élémentaire de \mathbb{R}^2 (évident).
2. Pour tout $R > 0$, le disque fermé

$$\overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, R)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

est une partie élémentaire de \mathbb{R}^2 car

$$\begin{aligned} \overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, R)} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -R \leq y \leq R, -\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}\} \end{aligned}$$

★ Théorème 3

(Théorème de Fubini généralisé) Soient $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie élémentaire et $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, alors si l'on note

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}, \end{aligned}$$

on a

$$\int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

La valeur commune de ces deux intégrales est appelée intégrale double de f sur A et est notée $\iint_A f(x, y) dx dy$.

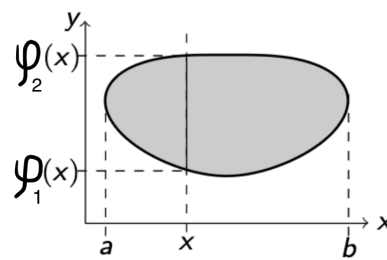


FIGURE 5.1 – Intégration par tranches verticales

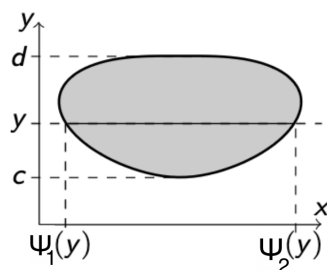
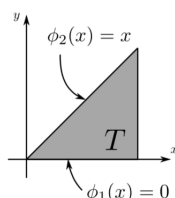


FIGURE 5.2 – Intégration par tranches horizontales

Exercice 2

On note $T = \{(x, y) \in [0, 1]^2; y \leq x\}$. Calculer $\iint_T x^2 y^3 dx dy$.

Correction de l'exercice 2 :

FIGURE 5.3 – T

Comme $f : (x, y) \mapsto x^2 y^3$ est continue sur \mathbb{R}^2 car polynomiale et donc en particulier continue sur T avec T partie élémentaire de \mathbb{R}^2 car

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$$

avec $\varphi_1 : x \mapsto 0$, $\varphi_2 : x \mapsto x$ continues sur $[0, 1]$ et $\psi_1 : y \mapsto y$, $\psi_2 : y \mapsto 1$ continues sur $[0, 1]$, on a alors d'après le Théorème de Fubini généralisé, Théorème 3 :

1ère façon : intégration par tranches verticales

$$\begin{aligned}
 \iint_T x^2 y^3 dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x x^2 y^3 dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^6}{4} dx = \left[\frac{x^7}{28} \right]_{x=0}^{x=1} \\
 &= \frac{1}{28}.
 \end{aligned}$$

2ème façon : intégration par tranches horizontales

$$\begin{aligned}
 \iint_T x^2 y^3 dx dy &= \int_0^1 \left(\int_y^1 x^2 y^3 dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(y^3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=y}^{x=1} \right) dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 y^3 (1 - y^3) dy \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^7}{7} \right]_{y=0}^{y=1} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \frac{7-4}{28} \\
 &= \frac{1}{28}.
 \end{aligned}$$

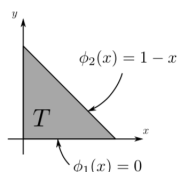
Définition 3

Soit A une partie élémentaire de \mathbb{R}^2 . Alors on appelle aire de A la quantité

$$\iint_A dx dy.$$

Exercice 3

On considère $T = \{(x, y) \in [0, 1]^2; x + y \leq 1\}$. Calculer l'aire de T .

FIGURE 5.4 – T

Correction de l'exercice 3 :

T est une partie élémentaire de \mathbb{R}^2 :

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y\}$$

avec $\varphi_1 : x \mapsto 0$, $\varphi_2 : x \mapsto 1 - x$ continues sur $[0, 1]$, de même $\psi_1 : y \mapsto 0$, $\psi_2 : y \mapsto 1 - y$ continues sur $[0, 1]$.

On a alors d'après Définition 3 et le théorème de Fubini généralisé, Théorème 3 :

$$\text{Aire}(T) = \iint_T dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} dy \right) dx = \int_0^1 (1 - x) dx = \left[-\frac{(1-x)^2}{2} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2}.$$

(On a intégré ici par tranches verticales, on aurait pu aussi intégrer par tranches horizontales.)

Exercice 4

Calculer l'aire du disque fermé $\overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, R)}$ pour tout $R > 0$.

Correction de l'exercice 4 Soit $R > 0$. On a vu, dans l'Exemple après Définition 2, que le disque fermé $\overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, R)}$ est une partie élémentaire de \mathbb{R}^2 car

$$\begin{aligned} \overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, R)} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -R \leq y \leq R, -\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}\}. \end{aligned}$$

On a alors d'après Définition 3 et le théorème de Fubini généralisé, Théorème 3 :

$$\begin{aligned}
 \text{Aire}(\overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, R)}) &= \iint_{D(0_{\mathbb{R}^2}, R)} dx dy \\
 &= \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx \\
 &= \int_{-R}^R 2 \sqrt{R^2-x^2} dx \\
 &= 4 \int_0^R \sqrt{R^2-x^2} dx \\
 &= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\sin^2 \theta)} \cos \theta d\theta \\
 &= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\
 &= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta \\
 &= 2R^2 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \pi R^2
 \end{aligned}$$

où dans la 5ème égalité, on a fait le changement de variable $x = R \sin \theta \iff \theta = \arcsin\left(\frac{x}{R}\right)$,
 $dx = R \cos \theta d\theta$ et $x = 0 \iff \theta = 0$, $x = R \iff \theta = \frac{\pi}{2}$.

Définition 4

Une partie A de \mathbb{R}^2 est dite simple si elle est réunion d'une famille finie non vide de parties élémentaires d'intérieurs deux à deux disjoints, i.e. s'il existe A_1, \dots, A_n des parties élémentaires de \mathbb{R}^2 avec ($n \in \mathbb{N}^*$) vérifiant

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{et } \forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j \implies \overset{\circ}{A}_i \cap \overset{\circ}{A}_j = \emptyset.$$

Définition 5

Soit A est une partie simple de \mathbb{R}^2 , avec $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ où les A_i sont des parties élémentaires. Si $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, on appelle intégrale double de f sur A le scalaire

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} f(x, y) dx dy.$$

★ Proposition 1

Soit A une partie simple de \mathbb{R}^2 . Pour toutes fonctions $f, g : A \rightarrow \mathbb{K}$ continues, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

i) $\iint_A (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)) dx dy = \lambda \iint_A f(x, y) dx dy + \mu \iint_A g(x, y) dx dy,$

ii) Si f est à valeurs positives, alors $\iint_A f(x, y) dx dy \geq 0,$

iii) Si f est à valeurs positives et $\iint_A f(x, y) dx dy = 0$, alors f est nulle sur A ,

iv) $\left| \iint_A f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| dx dy.$

★ Proposition 2

Soient A, B deux parties simples de \mathbb{R}^2 et $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{K}$ continue. Si $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$, alors

$$\iint_{A \cup B} f(x, y) dx dy = \iint_A f(x, y) dx dy + \iint_B f(x, y) dx dy.$$

5.2 Intégrales triples

Définition 6

(Théorème de Fubini en tranches) Soit A une partie de \mathbb{R}^3 décrite en "tranches" :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq z \leq b \text{ et } (x, y) \in D_z\}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et pour tout $z \in [a, b]$, la tranche D_z est une partie simple de \mathbb{R}^2 . Soit $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{K}$ continue, on définit alors l'intégrale triple de f sur A comme

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

★ Proposition 3

(Théorème de Fubini en piles) Soit A une partie de \mathbb{R}^3 décrite en "piles" au dessus d'une partie simple D de \mathbb{R}^2 :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D \text{ et } \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

où D est une partie simple de \mathbb{R}^2 et α et β sont deux fonctions continues sur D .

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ continue. Alors l'intégrale triple de f sur A est

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Définition 7

Soit A une partie de \mathbb{R}^3 décrite en "piles" ou "tranches" (cf. Définition 6, Proposition 3), alors le volume de A est donné par $\iiint_A dx dy dz$.

Remarque 1

Si f est une fonction continue, positive sur D , partie simple de \mathbb{R}^2 , alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \text{Vol}(A)$$

où

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

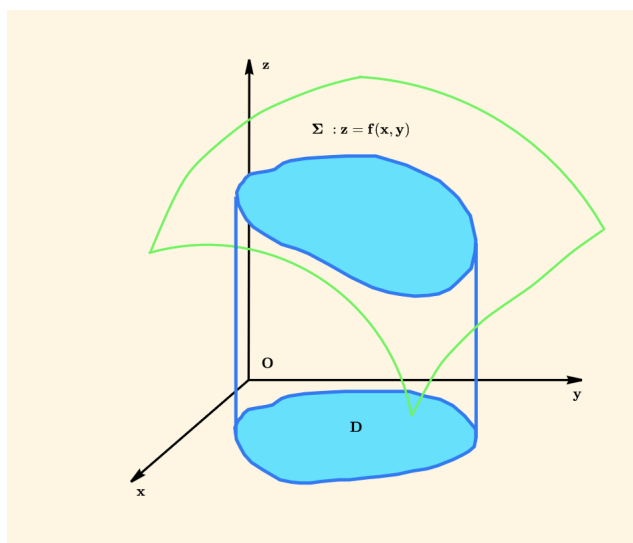


FIGURE 5.5

Exercice 5

On considère le tétraèdre $T_3 = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3; x + y + z \leq 1\}$.
Calculer $\text{Vol}(T_3)$.

Correction de l'exercice 5 :

Pour tout $z \in [0, 1]$, considérons

$$T_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y, z) \in T\} = \{(x, y) \in [0, 1]^2; x + y \leq 1 - z\} = \{(x, y) \in [0, 1 - z]^2; x + y \leq 1 - z\} \text{ (triangle).}$$

On a alors

$$T_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1 \text{ et } (x, y) \in T_z\}$$

avec pour tout $z \in [0, 1]$, T_z est une partie élémentaire de \mathbb{R}^2 car pour $z \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} T_z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 - z, 0 \leq y \leq 1 - z - x\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1 - z, 0 \leq x \leq 1 - z - y\}. \end{aligned}$$

Par suite, d'après Définition 6 (Fubini en tranches) et Définition 7,

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(T_3) &= \int_0^1 \left(\iint_{T_z} dx dy \right) dz \\
 &= \int_0^1 (\text{Aire}(T_z)) dz \\
 &= \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2} dz \\
 &= \left[-\frac{(1-z)^3}{6} \right]_{z=0}^{z=1} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que l'aire du triangle T_z n'est autre que $\frac{(1-z)^2}{2}$.

2ème façon :

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(T_3) &= \iiint_T dx dy dz \\
 &= \int_0^1 \left(\iint_{T_z} dx dy \right) dz \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-z-x} dy \right) dx \right) dz \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} (1-z-x) dx \right) dz \\
 &= \int_0^1 \left[-\frac{(1-z-x)^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1-z} dz \\
 &= \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2} dz \\
 &= \left[-\frac{(1-z)^3}{6} \right]_{z=0}^{z=1} \\
 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Exercice 6

Pour $R > 0$, on considère, dans \mathbb{R}^3 , la boule fermée (pour la norme $\|\cdot\|_2$)

$$\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^3}, R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Calculer $\text{Vol}(\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^3}, R))$.

Correction de l'exercice 6 :

Pour tout $z \in [-R, R]$, considérons

$$\begin{aligned} D_z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y, z) \in \overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^3}, R)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\} \\ &= \overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, \sqrt{R^2 - z^2}) = \overline{D}(0_{\mathbb{R}^2}, \sqrt{R^2 - z^2}). \end{aligned}$$

On a alors

$$\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^3}, R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -R \leq z \leq R \text{ et } (x, y) \in D_z\}$$

avec pour tout $z \in [-R, R]$, $D_z = \overline{D}(0_{\mathbb{R}^2}, \sqrt{R^2 - z^2})$ est une partie élémentaire de \mathbb{R}^2 (voir Exemple après Définition 2).

Par suite, d'après Définition 6 (Fubini en tranches) et Définition 7,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^3}, R)) &= \iiint_{\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^3}, R)} dx dy dz \\ &= \int_{-R}^R \left(\iint_{D_z} dx dy \right) dz \\ &= \int_{-R}^R \text{Aire}(D_z) dz \\ &= \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz \\ &= 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2) dz \\ &= 2\pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^R \\ &= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) \\ &= 4\pi \frac{R^3}{3} \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que l'aire du disque $\overline{D}(0_{\mathbb{R}^2}, \sqrt{R^2 - z^2}) = \pi(R^2 - z^2)$ d'après Exercice 4.

Remarque 2

Soient $B \subset A \subset \mathbb{R}^2$ (resp. $B \subset A \subset \mathbb{R}^3$) avec A, B deux parties simples de \mathbb{R}^2 (resp. A, B deux parties décrites en tranches ou piles dans \mathbb{R}^3) et tels que $\text{Aire}(A \setminus B) = 0$ (resp. $\text{Vol}(A \setminus B) = 0$).

On a alors pour toute fonction $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ continue,

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \iint_B f(x, y) \, dx dy$$

$$\text{(resp. } \iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_B f(x, y, z) \, dx dy dz \text{)}.$$

Remarque 3

Bien sûr, toutes ces définitions se généralisent à des domaines de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. Le théorème de Fubini ramène le calcul d'une intégrale sur un domaine de \mathbb{R}^n au calcul de n intégrales successives sur des intervalles de \mathbb{R} .