

Chapitre 4

Intégrales à paramètre

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Il s'agit dans ce chapitre de mettre en place les outils permettant d'étudier les fonctions définies par des intégrales.

Il y a en effet en analyse de nombreuses occasions de définir une fonction par une intégrale, qu'on appelle aussi intégrale à paramètre (le paramètre étant la variable dont dépend la fonction considérée).

Par exemple, on peut considérer la fonction Γ d'Euler : elle est définie (on verra ça à la fin du chapitre) pour tout $x > 0$, par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

4.1 Continuité des intégrales à paramètre

★ Théorème 1

(Continuité des intégrales à paramètre)

Soient $A \subset \mathbb{R}$, I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $I \times A$ à valeurs dans \mathbb{K} .

On suppose que :

- i) $\forall x \in A$, la fonction $f(., x) : t \mapsto f(t, x)$ est continue par morceaux sur I ,
- ii) $\forall t \in I$, la fonction $f(t, .) : x \mapsto f(t, x)$ est continue sur A ,
- iii) (hypothèse de domination) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A, \quad |f(t, x)| \leq \varphi(t), \quad \forall t \in I.$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(t, x) dt$ est bien définie et continue sur A .

Démonstration. Soit $x \in A$. La fonction $f(., x)$ est continue par morceaux sur I d'après i) et d'après iii), son module est majoré sur I par la fonction φ continue par morceaux et intégrable

sur I .

Par suite, $f(., x)$ est intégrable sur I (i.e. $0 \leq \int_I |f(t, x)| dt < +\infty$) et donc $\int_I f(t, x) dt \in \mathbb{K}$.

On a donc montré que pour tout $x \in A$, $F(x) \in \mathbb{K}$. D'où F est bien définie sur A .

Montrons que F est continue sur A .

Soit $a \in A$. Montrons que F est continue en a . Pour cela, on va utiliser le critère séquentiel de la continuité.

Soit donc $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers a . Montrons que la suite $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F(a)$.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction $f(., x_n)$ définie sur I par $f_n(t) = f(t, x_n)$ pour tout $t \in I$. On a :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux d'après i),
- La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers la fonction $f(., a)$ d'après ii) avec $f(., a)$ continue par morceaux d'après i).
En effet, pour tout $t \in I$, la fonction $f(t, .) : x \mapsto f(t, x)$ est continue sur A d'après ii). Comme $\lim_n x_n = a$, on déduit que $\lim_n f_n(t) = \lim_n f(t, x_n) = f(t, a)$.
- D'après iii), il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur I tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| \leq \varphi(t), \quad \forall t \in I \quad \text{i.e. } \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi \quad \text{sur } I.$$

Par suite, d'après le théorème de convergence dominée du Chapitre 1, la suite $(F(x_n))_n = \left(\int_I f_n(t) dt \right)_n$ converge et a pour limite $\int_I f(a, t) dt = F(a)$.

On a donc montré que pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers a , la suite $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F(a)$. Par suite F est continue en a , pour tout $a \in A$ et donc F est continue sur A . \square

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$. Montrer que F est bien définie et continue sur \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 1 :

Pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, posons $f(t, x) = \sin(xt)e^{-t^2}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t, x) dt$.

On a :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(., x) : t \mapsto f(t, x)$ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}^+ car les fonctions sinus et exponentielle sont continues sur \mathbb{R} ,
- $\forall t \geq 0$, la fonction $f(t, .) : x \mapsto f(t, x)$ est continue sur \mathbb{R} car la fonction sinus l'est sur \mathbb{R} ,

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(t, x)| = |\sin(xt)|e^{-t^2} \leq e^{-t^2} = \varphi(t), \quad \forall t \geq 0,$$

avec la fonction φ est continue (par morceaux) et intégrable sur \mathbb{R}^+ .

En effet, φ est continue sur \mathbb{R}^+ car exponentielle est continue sur \mathbb{R} et $t \mapsto -t^2$ l'est aussi.

Montrons que φ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

En effet, φ est continue sur \mathbb{R}^+ donc intégrable sur tout segment $[0, b] \subset [0, +\infty[$ et au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (intégrale de Riemman avec $\alpha = 2 > 1$), on déduit que φ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et par suite sur $[0, +\infty[$.

Par suite, d'après le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètre, la fonction F est bien définie et continue sur \mathbb{R} .

Exercice 2

Pour $x \geq 1$, on pose $F(x) = \int_0^\pi \sqrt{x + \cos t} dt$. Montrer que F est bien définie et continue sur $[1, +\infty[$.

Correction de l'exercice 2 :

Pour $(t, x) \in [0, \pi] \times [1, +\infty[$, posons $f(t, x) = \sqrt{x + \cos t}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^\pi f(t, x) dt$.

On a

- i) $\forall x \geq 1$, la fonction $f(\cdot, x) : t \mapsto f(t, x)$ est continue (par morceaux) sur $[0, \pi]$ car cosinus est continue sur \mathbb{R} et $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur \mathbb{R}^+ ,
- ii) $\forall t \in [0, \pi]$, la fonction $f(t, \cdot) : x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[1, +\infty[$ car $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et $x \geq 1$ ($x + \cos t \geq 0$ pour tout $t \in [0, \pi]$),
- iii) Soit $b > 1$. On a $\forall x \in [1, b]$,

$$|f(t, x)| = \sqrt{x + \cos t} \leq \sqrt{b + \cos t} = \varphi_b(t), \quad \forall t \in [0, \pi].$$

De plus, la fonction φ_b est continue sur le segment $[0, \pi]$ (d'après i) car ici $\varphi_b = f(\cdot, b)$ ou redire car cosinus est continue sur \mathbb{R} et $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur \mathbb{R}^+) et donc intégrable sur le segment $[0, \pi]$.

Par suite, d'après le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètre, la fonction F est bien définie et continue sur $[1, b]$, $\forall b > 1$ et donc définie et continue sur $\bigcup_{b>1} [1, b] = [1, +\infty[$.

4.1.1 Utilisation du Théorème de convergence dominée

Le Théorème 1 dit que quand $a \in A$, $\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(t, x) dt = \int_I \lim_{x \rightarrow a} f(t, x) dt$.

On peut généraliser ce résultat quand a est adhérent au domaine A , a réel ou infini, grâce encore une fois au Théorème de convergence dominée.

Voici un exemple :

Exercice 3

1. Montrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt$ est bien définie et continue sur \mathbb{R}^* .

Indication : Montrer séparément que F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$, respectivement sur $] - \infty, 0[$.

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

Démonstration. 1. $\alpha)$ Montrons tout d'abord que F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$. Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^+ \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto e^{-x^2 t^2} \end{aligned}$$

On a

- i) Pour tout $x > 0$, $f(\cdot, x) : t \mapsto f(t, x)$ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}^+ car exponentielle et $u \mapsto u^2$ sont continues sur \mathbb{R} ,
- ii) De même, pour tout $t \geq 0$, $f(t, \cdot) : x \mapsto f(t, x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- iii) Soit $a > 0$.

On a pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$\forall t \geq 0, \quad |f(t, x)| = e^{-x^2 t^2} \leq e^{-a^2 t^2} = \varphi_a(t),$$

où on a utilisé le fait que $y \mapsto e^{-yt^2}$ est décroissante sur \mathbb{R} , que $x \geq a > 0$ et donc $x^2 \geq a^2$ (car $u \mapsto u^2$ croissante sur \mathbb{R}^+ .)

La fonction φ_a est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}^+ et est intégrable sur \mathbb{R}^+ . En effet, φ_a est continue sur \mathbb{R}^+ (car exponentielle et $u \mapsto u^2$ le sont ou car ici $\varphi_a = f(\cdot, a)$ continue d'après i)) et est donc intégrable sur tout segment $[0, b] \subset [0, +\infty[$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $0 \leq \varphi_a(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée.

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (intégrale de Riemman avec $\alpha = 2 > 1$), on déduit que φ_a est intégrable au voisinage de $+\infty$ et par suite sur $[0, +\infty[$.

Par suite d'après le Théorème 1, $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t, x) dt$ est bien définie et continue sur $]a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ et donc bien définie et continue sur $\bigcup_{a>0}]a, +\infty[=]0, +\infty[$.

β) On montre pareil que F est bien définie et continue sur $] - \infty, 0[$.

Conclusion : F est bien définie et continue sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R}^*$

2. α) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $]0, +\infty[$ qui tend vers $+\infty$. Comme $\lim_n x_n = +\infty$, on peut supposer $x_n \geq 1, \forall n \geq 0$.
Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n := f(., x_n) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-x_n^2 t^2}.$$

On a

- i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = f(., x_n)$ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}^+ d'après 1, α), i) (ou redire car exponentielle et $u \mapsto u^2$ sont continues sur \mathbb{R}),
ii) Convergence simple de $(f_n)_n$ sur \mathbb{R}^+ .
Soit $t_0 \geq 0$.

- a. Si $t_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 1$ et donc $\lim_n f_n(0) = 1$.
b. Si $t_0 > 0$, comme $\lim_n x_n = +\infty$, $\lim_n f_n(t_0) = 0$.

Par suite, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(0) = 1$ et $h(t) = 0$ pour tout $t > 0$.

La fonction h est continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ (continue partout sauf en 0),

- iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(t)| = e^{-x_n^2 t^2} \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et donc

$$\forall n, |f_n| \leq \varphi \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

avec la fonction $\varphi = \varphi_1$ continue (par morceaux) sur \mathbb{R}^+ et est intégrable sur \mathbb{R}^+ (d'après 1, α), iii), avec $a = 1$ ici).

Par suite, d'après le Théorème de convergence dominée, (les f_n et h sont intégrables sur \mathbb{R}^+ et) on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} h(t) dt = 0.$$

Conclusion : On a donc montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = 0$ pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de $]0, +\infty[$ tel que $\lim_n x_n = +\infty$.

Par suite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

β) On montre pareil que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ (par critère séquentiel, en prenant $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $] -\infty, 0[$ qui tend vers $-\infty$ et en montrant avec le TCD que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = 0$. Comme $\lim_n x_n = -\infty$, on peut supposer cette fois $x_n \leq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

□

4.2 Dérivabilité des intégrales à paramètre

★ Théorème 2

(Dérivabilité d'une intégrale à paramètre)

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} . Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que

- i) $\forall x \in J$, la fonction $f(., x)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ,
- ii) $\forall t \in I$, $f(t, .)$ est dérivable sur J i.e. $\forall t \in I$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ existe pour tout $x \in J$ (respectivement $\forall t \in I$, la fonction $f(t, .)$ est C^1 sur J i.e. $\forall t \in I$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(t, .) : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est bien définie et continue sur J),
- iii) $\forall x \in J$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(., x) : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue par morceaux sur I ,
- iv) il existe une fonction $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in J, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \psi(t), \quad \forall t \in I.$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(t, x) dt$ est bien définie et dérivable (respectivement de classe C^1) sur J et on a

$$\forall x \in J, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

Démonstration. D'après i), puisque $\forall x \in J$, la fonction $f(., x) : t \mapsto f(t, x)$ est continue par morceaux et intégrable sur I , la fonction F est bien définie sur J .

Soit $a \in J$. Montrons que F est dérivable en a .

Posons $\forall (t, x) \in I \times J$

$$g_a(t, x) = \begin{cases} \frac{f(t, x) - f(t, a)}{x - a} & \text{si } x \neq a, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(t, a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Notons que pour $x \neq a$, $\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \int_I g_a(t, x) dt$.

On va appliquer le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètres à g_a .

- a) $\forall x \in J$ (y compris pour $x = a$), la fonction $g_a(\cdot, x) : t \mapsto g_a(t, x)$ est continue par morceaux sur I d'après i) et iii).
 b) $\forall t \in I$, la fonction $g_a(t, \cdot) : x \mapsto g_a(t, x)$ est continue sur J d'après ii) (y compris pour $x = a$).

En effet, pour $x \in J$ avec $x \neq a$ c'est dû au fait que $f(t, \cdot)$ est continue sur J (car dérivable) et $u \mapsto \frac{1}{u}$ continue sur \mathbb{R}^* . Et pour $x = a$, on a par définition de $\frac{\partial f}{\partial x}(t, a)$, pour tout $x \neq a$, $g_a(t, x) = \frac{f(t, x) - f(t, a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{\partial f}{\partial x}(t, a) = g_a(t, a)$.

- c) $\forall x \in J$, on a, d'après l'inégalité des accroissements finis et iv),

$$\forall t \in I, |g_a(t, x)| = \begin{cases} \left| \frac{f(t, x) - f(t, a)}{x - a} \right| & \text{si } x \neq a, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, a) \right| & \text{si } x = a \end{cases} \leq \sup_{u \in J} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, u) \right| \leq \psi(t).$$

avec ψ continue par morceaux et intégrable sur I d'après iv).

Par suite, d'après le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètre, la fonction $G_a : x \mapsto \int_J g_a(t, x) dt$ est bien définie et continue sur J et donc en particulier continue en a . On en déduit que le taux $\frac{F(x) - F(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a égale à $G_a(a)$ et donc que F est dérivable en a avec

$$F'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} G_a(x) = G_a(a) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, a) dt.$$

Ainsi, F est dérivable en a , $\forall a \in J$, donc sur J et sa dérivée s'obtient par la dérivation sous le signe intégrale.

Enfin, si on suppose en plus dans ii) que $\forall t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue sur J (i.e. la fonction $f(t, \cdot)$ est C^1 sur J), on montre, à l'aide du Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètres appliqué cette fois-ci à la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ (à vérifier les hypothèses), que la fonction $F' : x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$ est continue sur J et donc F est de classe C^1 sur J . \square

Par récurrence, on en déduit du Théorème 2, le Corollaire suivant pour les dérivées d'ordre supérieur.

★ Corollaire 1

(Intégrale à paramètre de classe C^p)

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} . Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans \mathbb{K} et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

- i) $\forall x \in J$, la fonction $f(., x)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ,
- ii) $\forall t \in I$, la fonction $f(t, .)$ est C^p sur J i.e. $\forall k = 1, \dots, p$, la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, .) : x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x)$ est bien définie et continue sur J ,
- iii) $\forall k = 1, \dots, p, \forall x \in J$, la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(., x) : t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x)$ est continue par morceaux sur I ,
- iv) $\forall k = 1, \dots, p$, il existe une fonction $\psi_k : I \rightarrow \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in J, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) \right| \leq \psi_k(t), \quad \forall t \in I.$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(t, x) dt$ est bien définie et de classe C^p sur J et on a

$$\forall k = 1, \dots, p, \forall x \in J, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) dt.$$

Et le Corollaire suivant :

★ Corollaire 2

(Intégrale à paramètre de classe C^∞)

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} . Soit $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans \mathbb{K} . On suppose que

- i) $\forall x \in J$, la fonction $f(\cdot, x)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ,
- ii) pour tout $t \in I$, la fonction $f(t, \cdot)$ est C^∞ sur J i.e. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, \cdot) : x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x)$ est bien définie et continue sur J ,
- iii) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in J$, la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\cdot, x) : t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x)$ est continue par morceaux sur I ,
- iv) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $\psi_k : I \rightarrow \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in J, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) \right| \leq \psi_k(t), \quad \forall t \in I.$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(t, x) dt$ est bien définie et de classe C^∞ sur J et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in J, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) dt.$$

Exercice 4

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Quel est le domaine de définition de Γ ?
2. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que Γ est C^∞ sur $]0, +\infty[$, et calculer $\Gamma^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que Γ est strictement convexe.
5. Montrer que Γ est log-convexe.
6.
 - a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
 - b) En déduire $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et un équivalent de Γ en 0.
 - c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x)$.
7. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Intégrale de Gauss). Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
8. Etudier les variations de Γ et donner l'allure de son graphe.

Correction de l'exercice 4 :

1. Considérons pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_x :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^{x-1}e^{-t}.$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_x \geq 0$ et continue sur $]0, +\infty[$ (car exponentielle est continue sur \mathbb{R} et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto t^\alpha$ est continue sur $]0, +\infty[$).

Comme $f_x \geq 0$, $\Gamma(x)$ est donc bien définie ssi f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_x est continue sur $]0, +\infty[$, elle est donc intégrable sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, reste le problème au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Au voisinage de 0, $0 \leq f_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ (car $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} = 1$).

Donc f_x est intégrable au voisinage de 0 ssi $1 - x < 1$ (on s'est ramené à une intégrale de Riemann au voisinage de 0) donc ssi $x > 0$.

Au voisinage de $+\infty$,

$$0 \leq f_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (4.1)$$

car $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$ par croissance comparée.

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, intégrale de Riemann convergente au voisinage de $+\infty$ car $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (4.1) que f_x est intégrable au voisinage de $+\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Par suite, f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ ssi $x > 0$ et donc le domaine de définition de Γ est $]0, +\infty[$.

2. Soit

$$f :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$$

On a :

i) $\forall x > 0$, la fonction $f(\cdot, x) = f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (voir 1.),

ii) $\forall t > 0$, la fonction $f(t, \cdot) : x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ car exponentielle est continue sur \mathbb{R} ($t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$),

iii) Soit $0 < a < b < +\infty$.

On a $\forall x \in [a, b]$,

$$\forall t > 0, \quad |f(t, x)| = |t^{x-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t} \leq g(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

car $y \mapsto t^y$ est décroissante sur \mathbb{R} si $0 < t < 1$ et est croissante sur \mathbb{R} si $t \geq 1$.

On a g est continue sur $]0, +\infty[$ (même en 1) et intégrable sur $]0, +\infty[$. En effet, comme g est continue sur $]0, +\infty[$, elle est donc intégrable sur tout segment $[c, d] \subset]0, +\infty[$, reste le problème au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Au voisinage de 0, $0 \leq g(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{a-1} = \frac{1}{t^{1-a}}$, on se ramène donc à une intégrale de Riemann convergente au voisinage de 0 car $1 - a < 1$ (comme $a > 0$) et donc g est intégrable au voisinage de 0.

Au voisinage de $+\infty$,

$$0 \leq g(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (4.2)$$

$$\text{car } \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{b+1}}{e^t} = 0.$$

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, intégrale de Riemann convergente au voisinage de $+\infty$ car $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (4.2) que g est intégrable au voisinage de $+\infty$.

D'où g est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par suite, d'après le Théorème 1, Γ est bien définie et continue sur tout segment $[a, b]$ avec $0 < a < b < +\infty$ et donc bien définie (on le savait déjà d'après 1.) et continue sur $\bigcup_{0 < a < b < +\infty} [a, b] =]0, +\infty[$.

3. Montrons que Γ est de classe C^∞ . On a

- i) $\forall x > 0$, la fonction $f(\cdot, x) = f_x$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'après 1. ou 2. i) et iii),
- ii) $\forall t > 0$, la fonction $f(t, \cdot) : x \mapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln t} e^{-t}$ est C^∞ sur $]0, +\infty[$ car exponentielle est C^∞ sur \mathbb{R} et on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$.
- iii) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\cdot, x) : t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ car $\ln, t \mapsto e^{-t}$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto t^\alpha$ sont continues sur $]0, +\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $u \mapsto u^k$ est continue sur \mathbb{R} .
- iv) Soient $0 < a < b < +\infty$.
On a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]a, b[$,

$$\forall t > 0, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) \right| = |\ln t|^k t^{x-1} e^{-t} \leq g_k(t) = \begin{cases} |\ln t|^k t^{a-1} e^{-t} & \text{si } 0 < t < 1 \\ |\ln t|^k t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

même justification que dans 2.,

avec g_k continue sur $]0, +\infty[$ (même en 1) et intégrable sur $]0, +\infty[$.

En effet, comme g_k est continue sur $]0, +\infty[$, elle est intégrable sur tout segment

$[c, d] \subset]0, +\infty[$.

Au voisinage de 0 (on suppose $0 < t < 1$), $0 \leq g_k(t) \underset{0}{\sim} |\ln t|^k t^{a-1} = (-1)^k (\ln t)^k t^{a-1}$ intégrable au voisinage de 0 car on se ramène à une intégrale de Bertrand au voisinage de 0 avec $\alpha = 1 - a < 1$ donc convergente (ou dire que $g_k(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$, avec $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}$ intégrable au voisinage de 0, intégrale de Riemann au voisinage de 0 avec $1 - \frac{a}{2} < 1$, donc convergente) et donc g_k est intégrable au voisinage de 0. Au voisinage de $+\infty$,

$$0 \leq g_k(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (4.3)$$

car $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 g_k(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{b+1} (\ln t)^k}{e^t} = 0$ par croissance comparée.

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, intégrale de Riemann convergente au voisinage de $+\infty$ car $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (4.3) que g_k est intégrable au voisinage de $+\infty$.

D'où g_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par suite, d'après le Corollaire 2, Γ est de classe C^∞ sur $]a, b[$, $\forall 0 < a < b < +\infty$ donc C^∞ sur $]0, +\infty[= \bigcup_{0 < a < b < +\infty}]a, b[$ et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) dt = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

4. Montrons que Γ est strictement convexe. D'après 3., on a

$$\forall x > 0, \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \geq 0$$

car $\forall x > 0, \forall t > 0, (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} \geq 0$.

Donc Γ est convexe. Montrons qu'elle est strictement convexe.

Soit $x > 0$. Supposons que

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) dt = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt = 0. \quad (4.4)$$

Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot, x) : t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$, on déduit

alors de (4.4) que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot, x) = 0$ sur $]0, +\infty[$, absurde car pour tout $t > 0, t \neq 1$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) > 0.$$

D'où $\Gamma''(x) > 0$.

Conclusion : Nous avons montré que $\Gamma''(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Par suite, Γ est strictement convexe.

5. Montrons que Γ est log-convexe càd montrons que $\ln \circ \Gamma$ est convexe.

Notons tout d'abord que $\ln \circ \Gamma$ est bien définie sur $]0, +\infty[$ car Γ est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

En effet, soit $x > 0$. On a $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f_x(t) dt \geq 0$ car $f_x \geq 0$ sur $]0, +\infty[$.

Supposons que $\Gamma(x) = 0$. Comme f_x est continue, positive, on aurait alors $f_x = 0$ sur $]0, +\infty[$, absurde car pour tout $t > 0$, $f_x(t) > 0$.

D'où $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et donc $\ln \circ \Gamma$ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

On a en plus $\ln \circ \Gamma$ est C^2 (même C^∞) sur $]0, +\infty[$, car \ln et Γ le sont, avec

$$\forall x > 0, (\ln \circ \Gamma)'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

et donc

$$\forall x > 0, (\ln \circ \Gamma)''(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)}.$$

Or d'après 3. et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \Gamma'^2(x) &= \left(\int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt \right)^2 \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t^{x-1} e^{-t}} \right) \left(\ln t \sqrt{t^{x-1} e^{-t}} \right) dt \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\ &= \Gamma(x) \Gamma''(x). \end{aligned}$$

On en déduit alors que $\forall x > 0$, $(\ln \circ \Gamma)''(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)} \geq 0$. Par suite $\ln \circ \Gamma$ est convexe i.e. Γ est log-convexe.

6. a) i) Soit $x > 0$. On a $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$. Par intégration par parties, $(u(t) = t^x, v'(t) = e^{-t})$, on obtient

$$\Gamma(x+1) = \lim_{T \rightarrow +\infty} [-t^x e^{-t}]_{t=0}^{t=T} + x\Gamma(x) = x\Gamma(x)$$

car $\lim_{T \rightarrow +\infty} -T^x e^{-T} = 0$ par croissance comparée.

b) D'après a), on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ i.e.

$$\forall n \geq 2, \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

avec $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_{t=0}^{t=T} = 1$.

1ère méthode :

On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!. \quad (4.5)$$

En effet :

- Initialisation : (4.5) est vraie pour $n = 1$, $\Gamma(1) = 1 = 0!$.

-Hérédité : Supposons que (4.5) est vraie pour $n \geq 1$ i.e. $\Gamma(n) = (n-1)!$ et montrons qu'elle reste vraie pour $n+1$ i.e. montrons que $\Gamma(n+1) = n!$.

D'après a), $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$.

Par suite, d'après le principe de récurrence, (4.5) est vraie pour tout $n \geq 1$.

2ème méthode :

On a $\forall n \geq 2$, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$, donc

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n-1) = (n-2)\Gamma(n-2)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$$

En multipliant ces $n-1$ égalités, on obtient pour tout $n \geq 2$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

C'est aussi vrai pour $n = 1$, par suite pour tout $n \geq 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

ii) Cherchons un équivalent de Γ en 0.

On a $\forall x > 0$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ donc

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1). \quad (4.6)$$

Comme d'après 2., Γ est continue sur $]0, +\infty[$ et donc en particulier en 1, on a alors $\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$.

Par suite, on déduit de (4.6) que $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

c) On a d'après 6.b),ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

7. On a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Avec le changement de variables $u = \sqrt{t}$ ($t = u^2$),

$du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2u} dt \iff dt = 2udu$, $t = 0 \iff u = 0$, $t \rightarrow +\infty \iff u \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2udu = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

8. Puisque la fonction Γ'' est strictement positive sur $]0, +\infty[$ (d'après 4.), la fonction Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

D'autre part, Γ est continue sur $[1, 2]$ et dérivable sur $]1, 2[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$) avec $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ (d'après 6.). Par suite, d'après le théorème de Rolle, il existe $x_0 \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(x_0) = 0$. Comme Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on déduit que Γ' est strictement négative sur $]0, x_0[$ et strictement positive sur $]x_0, +\infty[$. On a donc montré qu'il existe $x_0 \in]1, 2[$ tel que Γ est strictement décroissante sur $]0, x_0[$ et est strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$.

Cherchons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$.

Comme la fonction Γ est (strictement) croissante sur $[2, +\infty[$, on a d'après 6., pour tout $x \geq 3$,

$$\Gamma(x) \geq (x-1)\Gamma(x-1) \geq (x-1)\Gamma(2) = x-1.$$

Par suite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

De plus, toujours d'après 6., pour tout $x > 1$, $\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{x-1}{x}\Gamma(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$). On en déduit que le graphe de Γ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $(y'y)$.

Allure du graphe de Γ :

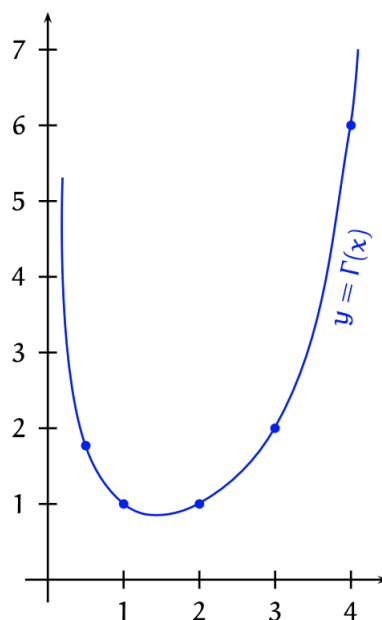


FIGURE 4.1 – graphe de Γ