Chapitre 2

Séries de fonctions

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On s'intéresse à la convergence de séries de fonctions $\sum_n f_n$ où les fonctions f_n sont définies sur un même domaine non vide D de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ ($\forall n \geq n_0$, $f_n : D \to \mathbb{K}$).

Définition 1

On appelle série de fonctions de terme général f_n, la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, définie par

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f_k.$$

On note cette série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n$ et S_n est appelée la somme partielle d'ordre n de celle-ci .

Exemple :

On a déja vu des séries de fonctions particulières, comme :

$\sum_{n\geq 0} f_n$ où $f_n : x \to \dfrac{x^n}{n!}$ avec $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ de somme e^x pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$\sum_{n\geq n_0} f_n$ où $f_n : x \to x^n$ avec $\sum_{n\geq n_0} f_n(x)$ de somme $x^{n_0}\dfrac{1}{1-x}$ pour tout $-1 < x < 1$ (si on prend $n_0 = 0$ la somme est $\dfrac{1}{1-x}$ pour tout $-1 < x < 1$).

Dans la suite, on supposera que $n_0 = 0$ et on notera souvent la série de fonctions $\sum_n f_n$.

On va commencer par étudier différents types de convergence d'une série de fonctions $\sum_n f_n$ sur $A \subset D$.

2.1 Types de Convergence d'une série de fonctions

2.1.1 Convergence simple et convergence absolue

Définition 2

(**Convergence simple des séries de fonctions**) On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement (CVS) sur $A \subset D$ si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge simplement sur A.

Définition 3

On suppose que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $A \subset D$.

1. On appelle alors la fonction somme de $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur A, la fonction $S : A \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in A, \quad S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

   et l'on écrit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur A.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle le reste d'ordre n de $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur A , la fonction $R_n : A \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in A, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S = S_n + R_n$ sur A et la suite de fonctions des restes $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur A.

Théorème 1

Soit $A \subset D$. On a équivalence entre

1. la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur A,
2. pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

Démonstration. La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $A \Longleftrightarrow$ la suite de fonctions des sommes partielles $(S_n)_n$ CVS sur $A \Longleftrightarrow \forall x \in A$, la suite numérique $(S_n(x))_n = (\sum_{k=0}^{n} f_k(x))_n$ converge $\Longleftrightarrow \forall x \in A$, la série numérique $\sum_n f_n(x)$ converge. $\square$

Définition 4

On appelle **domaine de convergence (simple)** de la série de fonctions $\sum_n f_n$ l'ensemble des $x \in D$ tels que la série numérique $\sum_n f_n(x)$ converge (ce qui n'est autre que le domaine de défintion de la fonction somme S).

Proposition 1

Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $A \subset D$, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur A.

Démonstration. Evident d'après le Théorème 1 et le fait que le terme général u_n d'une série numérique $\sum_n u_n$ convergente tend vers 0 quand $n \to +\infty$. $\square$

Attention!

La réciproque est fausse. La convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers la fonction nulle sur A est une condition nécessaire mais pas suffisante pour avoir la convergence simple de la série de fonctions $\sum_n f_n$ sur A.

Voici un contre-exemple :
Considérons la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec pour tout $n \geq 1$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a $\lim_n f_n(x_0) = 0$. Donc $(f_n)_n$ CVS vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
Notons que pour $x_0 = 0$, la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(0)$ est la série nulle donc converge et que pour tout $x_0 \neq 0$, $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ ne converge pas car $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ série de Riemann avec $\alpha = 1$ donc diverge.
Le domaine de convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est donc $\{0\}$.

Remarque 1

Contraposée de la Proposition 1 : Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas simplement vers la fonction nulle sur A, alors la série de fonctions $\sum_n f_n$ ne converge pas simplement sur A.

Définition 5

(**Convergence absolue des séries de fonctions**) On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge absolument (CVA) sur $A \subset D$ si pour tout $x \in A$, la série à termes positifs $\sum_n |f_n(x)|$ converge dans $\mathbb{R}$.
Autrement dit, la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge absolument sur A si et seulement si la série de fonctions $\sum_n |f_n|$ converge simplement sur A.

Exemple :

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

1. On considère pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^n. \end{array}$$

   La série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge simplement et absolument sur $]-1,1[$.
   Le domaine de convergence de cette série de fonctions est $]-1,1[$ car $\sum_{n\geq n_0} x^n$ diverge (grossièrement) pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 1$, .

De plus, la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n$ sur $]-1,1[$ est la fonction

$$\begin{array}{rccc} S & : &]-1,1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^{n_0}\dfrac{1}{1-x}. \end{array}$$

2. On considère cette fois pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & z^n. \end{array}$$

La série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge simplement et absolument sur

$$D(0,1) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}.$$

Le domaine de convergence de cette série de fonctions est $D(0,1)$ (voir TD0, Exercice 3).
De plus, la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n$ sur $D(0,1)$ est la fonction

$$\begin{array}{rccc} S & : & D(0,1) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & z^{n_0}\dfrac{1}{1-z}. \end{array}$$

Proposition 2
Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge absolument sur $A \subset D$, alors elle converge simplement sur A.

Démonstration. Soit $x \in A$. Comme $\sum_n f_n$ converge absolument sur A, alors la série numérique $\sum_n |f_n(x)|$ converge et donc en particulier la série $\sum_n f_n(x)$ converge car la convergence absolue d'une série numérique implique la convergence de la série.
Par suite $\sum_n f_n$ converge simplement sur A. $\square$

2.1.2 Convergence uniforme

On va définir, comme pour les suites de fonctions, la convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum_n f_n$ en utilisant la suite de fonctions des sommes partielles.

Définition 6

(**Convergence uniforme des séries de fonctions**) On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément (CVU) sur $A \subset D$ si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$) converge uniformément sur A.

Proposition 3

Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $A \subset D$ alors elle converge simplement sur A.

Démonstration. Evidente car la convergence uniforme de la suite de fonctions $(S_n)_n$ sur A implique sa convergence simple sur A. $\square$

Proposition 4

Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $A \subset D$ alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur A.

Démonstration. $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $A \subset D \Longleftrightarrow$ la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S sur A. Comme pour tout $n \geq 1$, $f_n = S_n - S_{n-1}$, alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f = S - S = 0$ sur A.
En effet, soit $\epsilon > 0$. Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers S, alors

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in A,\ |S_n(x) - S(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Par suite, $\forall n \geq N_1 = N + 1$, $\forall x \in A$,

$$|f_n(x)| = |S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)| \leq |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)| < \epsilon.$$

On a donc montré que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ \forall x \in A,\ |f_n(x)| < \epsilon$$

ce qui n'est autre que la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers la fonction nulle sur A. $\square$

Attention!

La réciproque est fausse. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers la fonction nulle sur A est une condition nécessaire mais pas suffisante pour avoir la convergence uniforme de $\sum_n f_n$ sur A.

Voici un contre-exemple :
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec pour tout $n \geq 1$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$.
On a $\forall n \geq 1$, $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $(f_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
Pourtant la série de fonctions ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ puisque elle ne converge pas simplement sur $[0,1]$ (on a vu avant que $\sum_n f_n(x)$ ne converge qu'en $x = 0$).

Proposition 5

Soit $A \subset D$. On a équivalence entre

i) La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A.

ii) La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur A et la suite de fonctions des restes $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur A.

Démonstration. $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $A \iff \exists S : A \to \mathbb{K}$ tel que la suite de fonctions $(S_n)_n$ CVU vers S sur $A \iff \exists S : A \to \mathbb{K}$ tel que $(S_n)_n$ CVS vers S sur A et $\sup_{x\in A} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{x\in A} |R_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \iff$ la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur A et la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur A. □

Remarque 2

Pour étudier la CVU de la suite de fonctions $(R_n)_n$ vers la fonction nulle sur A, on utilise les méthodes vues dans le Chapitre 1 pour la CVU des suites de fonctions :

i) pour montrer la CVU de $(R_n)_n$ vers la fonction nulle sur A, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut majorer $|R_n(x)|$ pour tout $x \in A$ par un réel positif α_n, indépendant de x, avec $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

ii) pour montrer que $(R_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur A, on cherche à trouver $(x_n)_n$ suite d'éléments de A tel que $R_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.

Comme $\sup_{x\in A}|R_n(x)| \geq |R_n(x_n)|$ pour tout n, on déduit que $\sup_{x\in A}|R_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.

iii) On calcule exactement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in A}|R_n(x)|$ (assez rare qu'on puisse le faire, on peut par exemple pour les séries géométriques convergentes) puis on voit si $\sup_{x\in A}|R_n(x)|$ tend ou ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.

☆ Proposition 6

(**Critère de Cauchy uniforme**) La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $A \subset D$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p > q \geq N, \forall x \in A, \left|\sum_{k=q+1}^{p} f_k(x)\right| < \epsilon.$$

Démonstration. $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $A \subset D \iff$ la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur $A \iff$ la suite de fonctions $(S_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $A \iff$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p > q \geq N, \forall x \in A, |S_p(x) - S_q(x)| = \left|\sum_{k=q+1}^{p} f_k(x)\right| < \epsilon.$$

□

☆ Proposition 7

(**Rappel : Critère spécial séries alternées**) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série réelle alternée (càd $u_n u_{n+1} \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ce qui est équivalent à dire que le signe de u_n change à chaque n ou que $((-1)^n u_n)_n$ est de signe constant).
Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, on a alors $\sum_n u_n$ converge . De plus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |R_n| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k| \leq |u_{n+1}|$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est du même signe que u_{n+1}.

Démonstration. On va faire la démonstration quand u_n est du signe de $(-1)^n$ donc $u_0 \geq 0$, même principe si $u_0 \leq 0$.
On va montrer que les sous-suites de sommes partielles $(v_n)_n = (S_{2n})_n$ et $(r_n)_n = (S_{2n+1})_n$ sont adjacentes. Plus précisément, on va montrer $(v_n)_n = (S_{2n})_n$ est décroissante et $(r_n)_n = (S_{2n+1})_n$ est croissante et que $\lim_n (S_{2n} - S_{2n+1}) = 0$.
Comme $(|u_n|)_n$ est décroissante (et que u_n est du signe de $(-1)^n$), on a
$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$, donc $(S_{2n})_n$ est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0$, donc $(S_{2n+1})_n$ est croissante.
D'autre part, $S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
Donc les 2 suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes (on a en particulier pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $r_p \leq v_q$) et convergent donc vers la même limite S. On déduit donc que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge vers S càd la série $\sum_n u_n$ converge.
Par monotonie, on a d'une part pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ ce qui implique que $u_{2n+1} = S_{2n+1} - S_{2n} \leq R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0$ et d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$ ce qui implique que $0 \leq R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}$.
On déduit alors que $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que R_n est du même signe que u_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

☆ **Théorème 2**
(Critère de convergence uniforme pour les séries alternées)
On suppose $D \subset \mathbb{R}$. Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions tel que pour tout $x \in A \subset D$, $\sum_n f_n(x)$ est une série alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées (CSSA), càd $(|f_n(x)|)_n$ décroissante et converge vers 0.
Si on suppose de plus que $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur A, alors la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A.

Démonstration. D'après le critère spécial des séries alternées (CSSA), $\sum_n f_n(x)$ converge pour tout $x \in A$, donc $\sum_n f_n$ CVS sur A, et on a de plus

$$\forall x \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|,$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sup_{x \in A} |R_n(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_{n+1}(x)|. \tag{2.1}$$

Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur A (et donc $\sup_{x \in A} |f_{n+1}(x)| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$) , l'inégalité (2.1) nous donne que la suite de fonctions $(R_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur A.

Par suite, comme $\sum_n f_n$ CVS sur A et $(R_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur A, on déduit de la Proposition 5 que $\sum_n f_n$ CVU sur A. $\square$

2.1.3 Convergence normale

Définition 7

(**Convergence normale des séries de fonctions**) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de D à valeur dans $\mathbb{K}$ tel que pour tout n, f_n est bornée.
On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement (CVN) sur $A \subset D$ si la série numérique $\sum_n \|f_n\|_{\infty,A}$ converge, où $\|f_n\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} |f_n(x)|$.

Proposition 8

Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur $A \subset D$ alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur A.

Démonstration. Évidente car $\sum_n f_n$ CVN sur $A \Longleftrightarrow \sum_n \sup_{x\in A} |f_n(x)|$ converge et donc le terme général de cette série numérique $\sup_{x\in A} |f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. $\square$

Attention!

La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers la fonction nulle sur A est une condition nécessaire mais pas suffisante pour avoir la convergence normale de $\sum_n f_n$ sur A.

En effet, considérons de nouveau par exemple la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec pour tout $n \geq 1$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$.
On a $\forall n \geq 1$, $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $(f_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
Pourtant la série de fonctions ne converge pas normalement sur $[0,1]$ car $\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

Théorème 3
Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur $A \subset D$, alors elle converge absolument sur A.
De plus, elle converge uniformément sur A.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $CVN \Longrightarrow CVA$.
Supposons que $\sum_n f_n$ converge normalement sur $A \subset D$.
Soit $x \in A$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty,A}. \tag{2.2}$$

Comme par définition de la convergence normale de $\sum_n f_n$, on a $\sum_n \|f_n\|_{\infty,A}$ converge, on déduit de (2.2) que $\sum_n |f_n(x)|$ converge pour tout $x \in A$.
Par suite $\sum_n f_n$ converge absolument sur A.

Nous allons montrer maintenant que $CVN \Longrightarrow CVU$.
Supposons que $\sum_n f_n$ converge normalement sur $A \subset D$ alors par définition, la suite numérique $\left(\sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in A} |f_k(x)|\right)_n$ est convergente et donc de Cauchy. On a donc,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p > q \geq N, \left|\sum_{k=0}^{p} \sup_{x\in A} |f_k(x)| - \sum_{k=0}^{q} \sup_{x\in A} |f_k(x)|\right| = \sum_{k=q+1}^{p} \sup_{x\in A} |f_k(x)| < \epsilon.$$

Comme pour tout $x \in A$,

$$\left|\sum_{k=q+1}^{p} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \sup_{x\in A} |f_k(x)|,$$

on obtient alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p > q \geq N,\ \forall x \in A, \left|\sum_{k=q+1}^{p} f_k(x)\right| < \epsilon.$$

Par suite, $\sum_n f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A et donc converge uniformément sur A (Proposition 6). $\square$

Remarque 3
On a donc

1. $CVN \Rightarrow CVA \Rightarrow CVS$,
2. $CVN \Rightarrow CVU \Rightarrow CVS$.
3. Toutes les autres implications sont fausses.

Exemple :
$CVS \not\Rightarrow CVA$, $CVU \not\Rightarrow CVN$ et $CVU \not\Rightarrow CVA$.
Considérons par exemple la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ avec pour tout $n \geq 1$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^+$, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x_0)$ est une série alternée qui vérifie le CSSA (à vérifier) et donc converge. Par suite, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$.
D'après le CSSA, on a en plus $\forall x \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |R_n(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_{n+1}(x)|. \tag{2.3}$$

Comme $\forall n \geq 1,\ \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$, on déduit de (2.3) que $(R_n)_n$ converge uniformément aussi vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.
Par suite, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
Montrons maintenant que $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas absolument sur $\mathbb{R}^+$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. On a $\forall n \geq 1$, $0 \leq |f_n(x_0)| = \dfrac{1}{n+x_0} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
Comme la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, on déduit que $\sum\limits_{n\geq 1} |f_n(x_0)|$ diverge et donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas absolument sur $\mathbb{R}^+$ (ni sur aucune partie de $\mathbb{R}^+$) et donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas non plus normalement sur $\mathbb{R}^+$ (on peut aussi montrer la non convergence normale directement car $\forall n \geq 1,\ \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} \dfrac{1}{n+x} = |f_n(0)| = \dfrac{1}{n}$ et la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge).

Exemple :

$CVS \nRightarrow CVU$, $CVA \nRightarrow CVN$ et $CVA \nRightarrow CVU$.
Considérons par exemple la série de fonctions $\sum_n f_n$ avec $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = x^n$.
$\sum_n f_n$ CVS et CVA sur $]-1,1[$ car pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_n |x^n| = \sum_n |x|^n$ est une série géométrique de raison $|x| \in [0,1[$ donc convergente.
Montrons que $\sum_n f_n$ ne converge ni uniformément ni normalement sur $]-1,1[$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in]-1,1[} |f_n(x)| = \sup_{x\in]-1,1[} |x|^n = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \neq 0$$

et donc $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]-1,1[$ et par suite $\sum_n f_n$ ne converge ni uniformément ni normalement sur $]-1,1[$.

Remarque 4

En pratique, pour étudier la convergence normale d'une série de fonctions $\sum_n f_n$ sur A, on procède souvent ainsi :

i) si $\sup_{x\in A} |f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\nrightarrow} 0$ càd $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur A, alors $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur A. Il suffit par exemple de trouver une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A tel que $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\nrightarrow} 0$.

ii) pour montrer la CVN de $\sum_n f_n$ sur A, on peut pour tout $n \in \mathbb{N}$, majorer $|f_n(x)|$ pour tout $x \in A$ par un réel positif a_n, indépendant de x, telle que la série à termes positifs $\sum_n a_n$ converge.

iii) pour montrer que $\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur A, il suffit de trouver une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A tel que $\sum_n |f_n(x_n)|$ diverge.
Comme pour tout n, $\|f_n\|_{\infty,A} \geq |f_n(x_n)|$, on déduit que $\sum_n \|f_n\|_{\infty,A}$ diverge aussi.

iv) Pour montrer ou nier la CVN de $\sum_n f_n$ sur A, on peut étudier pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variations de la fonction f_n sur A pour trouver explicitement $\|f_n\|_{\infty,A}$ et déduire la nature de la série numérique $\sum_n \|f_n\|_{\infty,A}$. On peut s'assurer tout d'abord de la CVS de $\sum_n f_n$ sur A avant le calcul éventuel de $\sup_{x\in A} |f_n(x)|$.

2.2 Régularité des sommes des séries de fonctions

Attention, comme pour les suites de fonctions, la convergence simple d'une série de fonctions $\sum_n f_n$ ne permet pas en général de préserver les propriétés de régularité des f_n (continuité, dérivabilité, intégrabilité...) pour la fonction somme S, ni d'intervertir limite et somme, somme et intégrale, somme et dérivée !
La question est donc : sous quelles conditions supplémentaires nous pourrons obtenir ces résultats ?
Nous verrons dans cette partie que la convergence uniforme des séries de fonctions nous permettra de conserver ces propriétés. En effet, à l'aide des propriétés de régularité de la limite d'une suite de fonctions du Chapitre 1, nous allons montrer des propriétés similaires pour les (fonctions) sommes des séries de fonctions : il suffit d'appliquer les résultats de régularité du Chapitre 1 à la suite de fonctions des sommes partielles $(S_n)_n$.

2.2.1 Interversion de limite et somme

Théorème 4
Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{K}$ et soit $A \subset D$. Soit a un point adhérent à A ou $a = +\infty$ si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré ou $-\infty$ si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas minoré. On suppose que

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie en a, notée l_n,
ii) la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur A.

Alors la série numérique $\sum_n l_n$ converge et la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet $\sum_{n=0}^{+\infty} l_n$ pour limite en a. Autrement dit, on peut intervertir limite et somme et on a

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Démonstration. La preuve découle directement du théorème de la double limite (Chapitre 1, Théorème 1) appliqué à la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n admet une limite finie en a égale à $\sum_{k=0}^{n} l_k$). □

Remarque 5
Bien justifier la CVU de la série de fonctions (généralement obtenue par CVN ou grâce à la majoration du reste associée au CSSA).

2.2.2 Convergence uniforme et continuité

Le théorème suivant découle du Théorème 4.

Théorème 5

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{K}$ et soit $A \subset D$ et $a \in D$ tels que :

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A.

ii) la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur A.

Alors la fonction somme $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur A.

Corollaire 1

On suppose que $D \subset \mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans D tels que

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I,

ii) la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I,

Alors la fonction somme $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur I.

Démonstration. On applique le Théorème 5 sur $[a, b]$ pour tout $a, b \in I$, $a < b$. On obtient alors que S est continue sur $[a, b]$ pour tout $a, b \in I$, $a < b$ et donc sur $\bigcup\limits_{a,b\in I; a<b} [a, b] = I$. $\square$

2.2.3 Intégration, dérivation

Dans cette partie, nous allons étudier les propriétés d'intégration et dérivation des (fonctions) sommes de séries de fonctions, mais cela ne concerne que les fonctions de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Convergence uniforme et intégration

Théorème 6

(**Interversion de somme-intégrale sur un segment**) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$,

ii) la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors la série numérique $\sum\limits_{n \geq 0} \int_a^b f_n(x)dx$ converge et on a

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)..$$

Démonstration. On applique le théorème d'interversion de limite et intégrale sur un segment pour les suites de fonctions (Chapitre 1, Théorème 3) à la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ et on utilise la linéarité de l'intégrale. □

Théorème d'intégration terme à terme

Théorème 7

(**Théorème d'intégration terme à terme, admis**)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I,

ii) la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I et la fonction somme S est continue par morceaux sur I,

iii) la série numérique $\sum\limits_{n \geq 0} \int_I |f_n(x)|dx$ converge.

Alors la fonction S est intégrable et on a

$$\int_I S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)dx \quad \text{i.e.} \quad \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)dx.$$

Convergence uniforme et dérivation

Théorème 8

(**Séries de fonctions de classe C^1**) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I, intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point), à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I,

ii) il existe $a \in I$ tel que $\sum_n f_n(a)$ converge,

iii) la série de fonctions des dérivées $\sum_n f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur I et la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I avec

$$S' := \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n' \quad \text{sur} \quad I$$

càd

$$\forall x \in I, \quad S'(x) := \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

De plus, $\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

En pratique, on montre souvent dans ii) que $\sum_n f_n$ converge simplement sur I. Notons aussi que si $\sum_n f_n'$ converge uniformément sur I alors iii) est vérifiée.

Démonstration. On applique le théorème de dérivation des suites de fonctions (Chapitre 1, Théorème 5) à la suite des sommes partielles $(S_n)_n$. ☐

En réitérant le Théorème 8 pour calculer les dérivées d'ordre supérieur, on obtient le théorème suivant :

Théorème 9

(**Séries de fonctions de classe C^p**) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I, intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^p sur I,

ii) pour tout $k = 0, 1, ..., p-1$, la série de fonctions $\sum_n f_n^{(k)}$ converge simplement sur I,

iii) la série de fonctions $\sum_n f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^p sur I et on a

$$\forall k = 0, 1, ..., p, \qquad S^{(k)} := \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)} \quad \text{sur } I.$$

De plus, pour tout $k = 0, ..., p-1$, $\sum_n f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Application aux théorèmes précédents dans les exercices suivants :

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2} \end{array}$$

1. a. Montrer que $\sum_n f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

   b. En déduire que la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

   c. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} S(x) = 1$ (utiliser le théorème d'interversion de somme et limite).

2. a. Montrer que $\sum_n f_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[,\ \forall a > 0$.

   b. En déduire que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0,\ S'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{ne^{-nx}}{1+n^2}.$$

Correction de l'Exercice 1

1. a. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \dfrac{1}{1+n^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ (car $y \to e^{-ny}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$).
   Comme $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc convergente, on déduit que $\sum_n \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)|$ converge et donc que $\sum_n f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

   b. On a

      i) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ car exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

      ii) D'après a), la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ et donc en particulier elle converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

   Par suite, d'après le Théorème 5, on déduit que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

   c. On a $\mathbb{R}^+$ n'est pas majoré et

i) Soit $n \in \mathbb{N}$.
- Si $n = 0$, $f_0(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = 1$ finie.
- Si $n \geq 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ finie.

ii) D'après a), la série de fonctions $\sum\limits_n f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ et donc en particulier elle converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Par suite, d'après le Théorème d'interversion de somme et limite (Théorème 4), on a

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} f_n(x) \right)$$

et donc

$$\lim_{x \to +\infty} S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 1.$$

2. Les f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 0$, $f_n'(x) = \dfrac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$.

Remarque :

i) Notons que $\sum\limits_n f_n'(0)$ diverge et donc la série $\sum\limits_n f_n'$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}^+$ et donc ne converge ni uniformément ni normalement sur $\mathbb{R}^+$.

ii) Notons aussi que $\sum\limits_n f_n'$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$ car $\sup\limits_{x \in]0,+\infty[} |f_n'(x)| = \dfrac{n}{1+n^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

iii) On peut également montrer que $\sum\limits_n f_n'$ ne converge pas uniformémement sur $]0, +\infty[$ en montrant que $\left| R_{1,n}(\dfrac{1}{n}) \right| \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$ où $R_{1,n}(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x)$.

a. Soit $a > 0$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{x \in [a,+\infty[} |f_n'(x)| = \dfrac{ne^{-na}}{1+n^2} \underset{+\infty}{=} o(\dfrac{1}{n^2})$ (on a utilisé le fait que $y \to e^{-ny}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \dfrac{ne^{-na}}{1+n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} ne^{-na} = 0$ par croissance comparée donc $\dfrac{ne^{-na}}{1+n^2} \underset{+\infty}{=} o(\dfrac{1}{n^2})$).
Comme $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc convergente, on déduit que $\sum\limits_n \sup\limits_{x \in [a,+\infty[} |f_n'(x)|$ converge et donc que $\sum\limits_n f_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

b. On a

   i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est C^1 sur $]0, +\infty[$ car exponentielle est C^1 sur $\mathbb{R}$.

   ii) $\sum\limits_n f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ car d'après 1.a), $\sum\limits_n f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ et donc en particulier simplement sur $\mathbb{R}^+$ et donc sur $]0, +\infty[\subset \mathbb{R}^+$.

   iii) D'après 2.b), $\sum\limits_n f_n'$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ et donc en particulier elle converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Par suite $\sum\limits_n f_n'$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$ (car pour tout $0 < a < b < +\infty$, $[a, b] \subset [a, +\infty[$).

   On déduit alors du Théorème 8, que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}.$$

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\begin{array}{rcccc} f_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^n \end{array}$$

1. Montrer que $\sum\limits_n f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$ pour tout $0 < a < 1$.
2. En déduire que $\forall a \in]-1, 1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} = -\ln(1-a)$.

Correction de l'Exercice 2

1. Soit $0 < a < 1$.
   On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{x \in [-a,a]} |f_n(x)| = \sup\limits_{x \in [0,a]} x^n = a^n$ (car $x \to |x^n| = |x|^n$ est paire et est croissante sur $\mathbb{R}^+$). Comme $\sum\limits_n a^n$ est une série géométrique de raison $0 \leq q = a < 1$ donc convergente, on déduit que $\sum\limits_n f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$ pour tout $0 < a < 1$.
2. Soit $-1 < a < 1$. Trois cas :

   a. Si $a = 0$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{0^n}{n} = 0 = -\ln(1-0)$.

   b. Si 0<a<1, on a

      i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, a]$.

ii) D'après 1), $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[-a,a]$ et donc en particulier elle converge uniformément sur $[-a,a]$ et donc sur $[0,a] \subset [-a,a]$.

Par suite d'après le théorème d'interversion de somme et intégrale sur un segment (Théorème 6), on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^a f_n(x)dx \right) = \int_0^a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^a x^n dx \right) = \int_0^a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} &= \int_0^a \frac{1}{1-x} dx \\ &= [-\ln|1-x|]_{x=0}^{x=a} \\ &= [-\ln(1-x)]_{x=0}^{x=a} \\ &= -\ln(1-a). \end{aligned}$$

Par suite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} = -\ln(1-a)$ pour tout $0 < a < 1$.

c. si $-1 < a < 0$, on montre comme dans b., en travaillant cette fois sur le segment $[a,0]$, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} = -\ln(1-a)$.