

Chapitre 1

Suites de fonctions

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On s'intéresse à la convergence des suites de fonctions $(f_n)_n$ où les fonctions f_n sont définies sur un même domaine non vide D de \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et à valeurs dans \mathbb{K} ($f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$). Le module sur \mathbb{C} est noté $|\cdot|$, $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

1.1 Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions



Définition 1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de D dans \mathbb{K} et $f : D \rightarrow \mathbb{K}$.

1. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement (CVS) vers f sur $A \subset D$ si pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ càd

$$\forall x \in A, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

Autrement dit, $(f_n)_n$ CVS vers f sur A si

$$\forall x \in A, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

où n_0 dépend de ϵ et de x .

La fonction f est alors appelée la **limite simple** de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur A et on note $f = \lim_n f_n$ sur A .

2. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément (CVU) vers f sur A si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

où n_0 ne dépend que de ϵ . Cette propriété est équivalente à :

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(ce qui suppose que $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang).

Notons que **si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A , alors $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur A** . Attention ! Réciproque fausse !

Exemple :

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^n$.

On a

i) $(f_n)_n$ CVS sur $[0, 1]$ vers $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

ii) $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

En effet, s'il y avait CVU, ce serait vers f ; or, pour tout n , $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$.

iii) Il ne suffit pas d'écarter 1 : pas de CVU sur $[0, 1[$ puisque pour tout n , $\sup_{x \in [0, 1[} |f_n(x) - f(x)| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$.

iv) Pour $a \in]0, 1[$, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f (fonction nulle) sur $[0, a]$. En effet, pour tout n ,

$$\sup_{x \in [0, a]} |f_n(x) - f(x)| = a^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

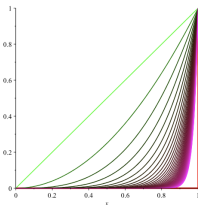


FIGURE 1.1 – les graphes des f_n , $n \geq 1$

1.1. CONVERGENCE SIMPLE, CONVERGENCE UNIFORME D'UNE SUITE DE FONCTIONS 3

★ Proposition 1

(Critère de Cauchy uniforme) Une suite de fonctions $(f_n)_n$ de D dans \mathbb{K} converge uniformément sur $A \subset D$ si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme suivant sur A :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall p, q \geq N, \forall x \in A, |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon.$$

Démonstration. Supposons que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $A \subset D$ vers une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{K}$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in A$, on a $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.

On a alors pour tout $p, q \geq n_0$ et pour tout $x \in A$, on a $|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| < \epsilon$.

D'où $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A .

Réciproquement, supposons que $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A . Montrons alors que $(f_n)_n$ converge uniformément sur A .

On va commencer par montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur A . Soit $a \in A$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A ,

$$\exists N \in \mathbb{N}; \forall p, q \geq N, \forall x \in A, |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon. \quad (1.1)$$

En particulier, on a pour tout $p, q \geq N$, $|f_p(a) - f_q(a)| < \epsilon$. Par suite, $(f_n(a))_n$ est de Cauchy dans \mathbb{K} donc converge vers $l_a \in \mathbb{K}$.

On a donc montré que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur A vers la fonction $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ qui à $x \in A$ associe l_x .

Montrons maintenant que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A .

Soit $\epsilon > 0$. En passant à la limite quand $q \rightarrow +\infty$ dans (1.1) (comme $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A), on obtient

$$\exists N \in \mathbb{N}; \forall p \geq N, \forall x \in A, \lim_{q \rightarrow +\infty} |f_p(x) - f_q(x)| = |f_p(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

D'où $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A . □

Méthodes pratiques :

Plan d'étude standard pour étudier la convergence d'une suite de fonctions $(f_n)_n$ sur A :

1. CVS : fixer x dans A et étudier la convergence de la suite numérique $(f_n(x))_n$, ce qui fournit la fonction limite f sur A le cas échéant (si nécessaire, distinguer différents cas selon la valeur de x);
2. CVU : Supposons que $(f_n)_n$ CVS vers f sur A .

- a. Pour montrer la CVU de $(f_n)_n$ vers f sur A , il suffit de chercher pour tout n , un majorant α_n (indépendant de x) de $\{|f_n(x) - f(x)|; x \in A\}$ tel que la suite numérique $(\alpha_n)_n$ converge vers 0. On a alors la CVU puisque $\forall n, 0 \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$.
- b. Pour nier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur A , il suffit de trouver une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A telle que la suite numérique $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ ne converge pas vers 0.
En effet, si $(f_n)_n$ CVU vers f sur A , alors pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A , on a
- $$\forall n, \quad 0 \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_A |f_n - f|$$
- et donc $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ converge vers 0 par encadrement.
- c. Pour montrer ou pour nier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur A , on peut éventuellement déterminer la valeur exacte de $\sup_A |f_n - f|$.
- d. En l'absence de convergence uniforme sur A , on peut parfois établir la convergence uniforme sur certaines parties de A (en restreignant le domaine).

1.2 Régularité des limites des suites de fonctions

La convergence simple d'une suite de fonctions $(f_n)_n$ ne permet pas de préserver la régularité des f_n (continuité, dérivabilité, intégrabilité...) au passage à la limite ni d'intervertir deux limites, ni limite-intégrale, ni limite-dérivée.

La question est donc : sous quelles conditions supplémentaires nous pourrions obtenir ces résultats ? Nous verrons dans cette partie que la convergence uniforme nous permettra de conserver ces propriétés.

1.2.1 Intersion des limites

On ne peut pas toujours intervertir les limites ! On revient à l'exemple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe x^n . La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 0$ pour $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$.

On a $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n \right) = 1$.



Définition 2

Soit A une partie de \mathbb{R} (respectivement de \mathbb{C}). Un point $a \in \mathbb{R}$ (respectivement $a \in \mathbb{C}$) est dit adhérent à A si tout intervalle ouvert centré en a (respectivement toute boule ouverte (disque ouvert) centrée en a) contient au moins un élément de A .

Remarquons qu'un point $a \in A$ est adhérent à A .

★ Théorème 1

(Théorème de la double limite) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans \mathbb{K} . Soit a un point adhérent à A ou $a = +\infty$ si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré ou $a = -\infty$ si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas minoré. On suppose que

- i) pour tout n , f_n admet en a une limite finie $l_n \in \mathbb{K}$,
- ii) la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A .

Alors la suite numérique $(l_n)_n$ converge dans \mathbb{K} vers une limite l et f admet l comme limite en a . Autrement dit, on peut intervertir les limites et on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Démonstration. Nous allons commencer par montrer la convergence de la suite numérique $(l_n)_n$. Pour cela, nous allons montrer que c'est une suite de Cauchy.

Soit $\epsilon > 0$. Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A , elle vérifie alors le critère de Cauchy uniforme sur A : il existe donc un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p, q \geq n_0$, on a pour tout $x \in A$,

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon.$$

En faisant tendre $x \rightarrow a$, on obtient $|l_p - l_q| \leq \epsilon$. On a donc montré que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, |l_p - l_q| \leq \epsilon.$$

Autrement dit, $(l_n)_n$ est une suite de Cauchy de \mathbb{K} et donc convergente. Notons l sa limite. Il reste à montrer que $f(x) \rightarrow l$ quand $x \rightarrow a$.

Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f(x) - l| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - l_n + l_n - l| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|. \quad (1.2)$$

Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (1.3)$$

D'autre part, $l_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$, donc il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_2, |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (1.4)$$

Prenons $n = \max(n_1, n_2)$. Comme $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in A, |x - a| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - l_n| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (1.5)$$

En utilisant (1.3), (1.4) et (1.5) dans (1.2), on déduit que $\forall x \in A$ tel que $|x - a| < \eta$, on a $|f(x) - l| < \epsilon$. On a donc montré que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in A, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

D'où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$. □

1.2.2 Convergence uniforme et continuité

Le théorème suivant découle du Théorème 1.

★ Théorème 2

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans \mathbb{K} telle que :

- i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A ,
- ii) la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A .

Alors f est continue sur A .

👤 Remarque 1

En reprenant l'exemple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe x^n , on voit que sans la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ on peut perdre la continuité de la fonction limite f .

1.2.3 Intégration, dérivation

Dans cette partie, nous allons étudier l'intégration, dérivation des (fonctions) limites de suites de fonctions, mais cela ne concerne que les fonctions de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

🍃 Définition 3

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $(a_i)_{i=0, \dots, p}$ de $[a, b]$ telle que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_i < \dots < a_p = b$ avec pour tout $i = 0, \dots, p-1$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ admet un prolongement continu sur $[a_i, a_{i+1}]$.
2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux si elle l'est sur tout segment de I .

Convergence uniforme et intégration★ **Théorème 3**

(Interversion de limite-intégrale sur un segment) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{K} .

On suppose que

- i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue,
- ii) la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur $[a, b]$.

Alors la suite numérique $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_n$ converge et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

Ce résultat reste vraie si on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $[a, b]$ et que $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur $[a, b]$ **continue par morceaux**.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in [a, b], |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

En intégrant les deux membres de cette inégalité sur $[a, b]$, on obtient

$$\forall n \geq n_0, \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\epsilon}{b-a} \int_a^b dx = \epsilon.$$

Et on a alors

$$\forall n \geq n_0, \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \epsilon$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx = 0$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

□

**Exercice 1**

Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^{\frac{x}{n}}$$

1. Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f à déterminer.
2. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ où $I_n := \int_0^1 f_n(x) dx$ (sans calculer les I_n).

**Remarque 2**

La convergence simple n'est pas suffisante pour intervertir limite et intégrale.

**Exercice 2**

Pour tout $n \geq 2$, soit

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 2}$ converge simplement vers $f = 0$ sur $[0, 1]$.
2. Montrer que $\lim_n \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx$.
3. Que peut-on déduire pour la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 2}$ vers f sur $[0, 1]$?

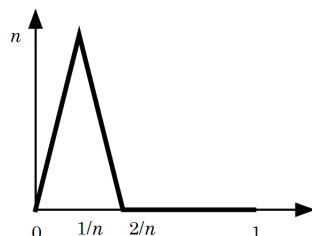


FIGURE 1.2 – graphe f_n , exercice 2

Théorème de convergence dominée★ **Théorème 4**

(**Théorème de convergence dominée : admis**) Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{K} . On suppose que

- i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I ,
- ii) la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux,
- iii) il existe une fonction $g : I \rightarrow [0, +\infty[$ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq g \quad \text{sur } I.$$

Alors les fonctions f_n et f sont (absolument) intégrables sur I et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

On a même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I |f_n(x) - f(x)| dx = 0$

✏ **Exercice 3**

On considère pour tout $n \geq 1$,

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} -nx + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

mais pas uniformément.

2. Calculer pour tout $n \geq 1$, $\int_0^1 f_n(x) dx$. *Indication* : tracer le graphe de f_n .
3. En déduire que $\lim_n \int_0^1 f_n(x) dx = 0 = \int_0^1 f(x) dx$.
4. Retrouver le résultat de 3) en utilisant le théorème de convergence dominée.

Exercice 4

(Intégrale de Wallis). Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$.

Exercice 5

Reprenons la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie dans l'Exercice 2. Nous avons montré que

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_n f_n(x) dx.$$

Quelle est l'hypothèse du Théorème de convergence dominée qui fait défaut ?

Convergence uniforme et dérivation

★ Théorème 5

(Suite de fonctions de classe C^1) Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{K} . On suppose que

- i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I ,
- ii) il existe $a \in I$ tel que la suite numérique $(f_n(a))_n$ converge,
- iii) la suite de fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Alors $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f de classe C^1 sur I vérifiant

$$f' = g \text{ sur } I \text{ i.e. } \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n.$$

De plus, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I .

Notons que si $(f'_n)_n$ converge uniformément vers g sur I alors iii) est vérifiée.

Démonstration. Nous allons commencer par montrer la convergence simple de $(f_n)_n$ sur I .

Notons $f(a) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a)$.

Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Supposons que $a < x$ (on fait pareil si $a > x$). Le Théorème 3 appliqué à $(f'_n)_n$ sur $[a, x]$ (hypothèses vérifiées), nous donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \int_a^x g(t) dt \in \mathbb{K}.$$

D'autre part, comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) - f(a),$$

on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$ pour tout $x \in I$ ($x = a$ inclus).

Par suite $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers la fonction f définie par $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$ pour tout $x \in I$.

Montrons maintenant que f est de classe C^1 sur I et que $f' = g$ sur I .

Comme g est continue sur I (car $\forall n$, f'_n est continue sur I et la suite de fonctions $(f'_n)_n$ CVU vers g sur tout segment de I , alors d'après Théorème 2, g est continue sur tout segment de I et donc sur I), on a alors d'après le Théorème fondamental de l'Analyse, $G : x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ est de classe C^1 sur I avec $\forall x \in I$, $G'(x) = g(x)$.

Comme $f = G + f(a)$ sur I , on déduit alors que f est de classe C^1 sur I avec $f' = g$ sur I .

Reste à montrer que $(f_n)_n$ CVU vers f sur tout segment de I . Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de I . On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_n(\alpha) + f_n(\alpha) - f(\alpha) - (f(x) - f(\alpha))| \\ &= \left| f_n(\alpha) - f(\alpha) + \int_\alpha^x (f'_n(t) - g(t))dt \right| \\ &\leq |f_n(\alpha) - f(\alpha)| + \left| \int_\alpha^x f'_n(t) - g(t)dt \right| \\ &\leq |f_n(\alpha) - f(\alpha)| + (\beta - \alpha) \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f'_n(t) - g(t)|. \end{aligned}$$

D'où,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(\alpha) - f(\alpha)| + (\beta - \alpha) \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f'_n(t) - g(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car $(f'_n)_n$ CVU vers g sur $[\alpha, \beta]$ segment et $\lim_n f_n(\alpha) = f(\alpha)$.

Par suite, $\sup_{x \in [\alpha, \beta]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ CVU vers f sur $[\alpha, \beta]$, pour tout $[\alpha, \beta]$ segment de I . □

Il en résulte le Corollaire suivant :

★ Corollaire 1

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{K} . On suppose que

- i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I ,
- ii) la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$,
- iii) la suite de fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Alors f est de classe C^1 sur I avec

$$f' = g \text{ sur } I \quad \text{i.e.} \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n \text{ sur } I.$$

De plus, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I .

En réitérant le Corollaire 1 pour calculer les dérivées d'ordre supérieur, on obtient le théorème suivant :

★ Théorème 6

(Suite de fonctions de classe C^p) Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $p \in \mathbb{N}^*$, et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{K} . On suppose que

- i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^p sur I ,
- ii) pour tout $k = 0, 1, \dots, p-1$, la suite de fonctions $(f_n^{(k)})_n$ converge simplement sur I vers une fonction g_k ,
- iii) la suite de fonctions $(f_n^{(p)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_p .

Alors la limite simple $f := g_0$ de $(f_n)_n$ sur I est de classe C^p sur I et on a pour tout $k = 0, 1, \dots, p$,

$$f^{(k)} = g_k \text{ sur } I \quad \text{i.e.} \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)} \text{ sur } I.$$

De plus, pour tout $k = 0, \dots, p-1$, la suite de fonctions $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers g_k sur tout segment de I .