Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 4 MAT2094L

L2 mathématiques, semestre de printemps 2025–2026

Feuille 2 : Eléments de topologie de $\mathbb{R}^n$

Objectifs	OUI	NON
Manipuler (abstraitement) les notions d'ouvert, fermé et compact		
Montrer qu'un ensemble est ouvert par des considérations géométriques		
Montrer qu'un ensemble est fermé/compact en utilisant des suites		
Manipuler (abstraitement) les notions d'adhérence et d'intérieur		

Exercice 1. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Montrons que l'ensemble $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 5y^2 + z^2 < 2\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^3$*. Soit* $\{(x_n, y_n, z_n)\}_n \subset \mathbb{R}^3$ *une suite, alors on a* $2x_n^2 + 5y_n^2 + z_n^2 < 2$ *et donc par passage à la limite, on a* $2x^2 + 5y^2 + z^2 < 2$ *ce qui veut dire que la limite appartient à* A*, donc* A *est fermé.*

Exercice 2. Ouverts, fermés et compacts de $\mathbb{R}^n$
Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? fermés ? compacts ? aucun des trois ? Justifier.
Indication : représenter graphiquement ces ensembles.

1. $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$
2. $]-2, 4[\cup]5, 6[$ dans $\mathbb{R}$
3. $]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$
4. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ dans $\mathbb{R}$
5. $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$
6. $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$
7. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$
8. $]-2, 1[\times[0, 3]$ dans $\mathbb{R}^2$
9. $\{9\} \times [0, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$
10. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ dans $\mathbb{R}^2$
11. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 6\}$ dans $\mathbb{R}^2$
12. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$
13. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3, y = 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$
14. $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$.
15. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x - 1| < 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$.
16. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ dans $\mathbb{R}^2$.
17. $\left\{\left(\dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 : (m, n) \in \mathbb{N}^*\right\}$.
18. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\}$.
19. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y - 1| + |z + 3| \leq 2\}$.

Exercice 3. Vrai ou Faux
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Soit $A = 2\mathbb{N}$. Alors A est un voisinage de 0.
2. Soit $B = [0,1[$, alors $\overline{B} =]0,1[$.
3. Soit $C = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, alors $\mathring{C} = \emptyset$.
4. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$, alors $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$.
5. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1\}$, alors $\mathring{E} = \emptyset$.

Exercice 4. Adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^n$
Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on définit l'adhérence de A par

$$\overline{A} := \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F.$$

1. Montrer que $A \subset \overline{A}$.
2. Montrer que $\overline{A}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$. Justifier qu'il s'agit du plus petit fermé contenant A.
3. Montrer que $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
4. Montrer que la notion d'adhérence définie dans cet exercice coïncide bien avec celle vue en cours, c'est-à-dire que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \forall V \text{ voisinage de } x, V \cap A \neq \emptyset\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists (x_k)_k \subset A, (x_k)_k \to x\} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F.$$

Exercice 5. Intérieur d'une partie de $\mathbb{R}^n$
Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on définit l'intérieur de A par

$$\mathring{A} := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0, B(x,r) \subset A\}.$$

1. Montrer que $\mathring{A} \subset A$.
2. Montrer que $\mathring{A}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Justifier qu'il s'agit du plus grand ouvert contenu dans A.
3. Montrer que $A = \mathring{A}$ si et seulement si A est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6. Frontière/bord d'un ensemble
Pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$, la frontière (ou le bord) de A est l'ensemble $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$. Montrer que :

1. $\mathring{A} \subset \overline{A}$.
2. ∂A est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
3. $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset\}$.
4. $\partial A = \partial(A^c)$.
5. A est fermé si et seulement si $\partial A \subset A$.
6. A est ouvert si et seulement si $\partial A \cap A = \emptyset$.

Exercice 7. Somme d'ensembles
On définit la sommme de tout couple d'ensembles $\{A, B\} \subset \mathbb{R}^n$ par

$$A + B = \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in A, y \in B\}.$$

1. Montrer que si A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^n$, alors $A + \{b\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que si A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^n$, alors $A + B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ fermé et $B \subset \mathbb{R}^n$ compact. Montrer que $A + B$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

4. Montrer que les ensembles $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermés dans $\mathbb{R}^n$ mais que $A + B$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^n$.
   Indication : on pourra considérer la suite $(u_n)_n = \{(1/n, 1)\}_n$.
5. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles compacts. Montrer, en utilisant des suites extraites, que $A + B$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
6. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $r > 0$. On pose $K_r = \bigcup_{x \in K} \overline{B}(x, r)$. Montrer que K_r est un compact.

Exercice 8. Intersection emboîtée de compacts

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties compactes non-vides de $\mathbb{R}^d$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_{n+1} \subset K_n$. On pose $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

1. Montrer que $K \neq \emptyset$.
   Indication : on pourra commencer par construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K_0$ *et montrer qu'elle admet une sous-suite qui converge vers* $x \in K$.
2. Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert contenant K. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_{n_0} \subset U$.
   Indication : Raisonner par l'absurde et construire une suite et une sous-suite comme dans la question 1.