

Contrôle partiel
Le 11 mars 2026 – durée 90 minutes

Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets connectés sont interdits. Tout réponse doit être justifiée. Le barème est indicatif. Le contrôle est noté sur 20 points.

Exercice # 1. (2 pts.) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Montrer que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in E$.

Exercice # 2. (3 pts.) Soient (F, N) un espace vectoriel normé, E un espace vectoriel et $L : E \rightarrow F$ une application linéaire injective. Soit $N' : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N'(x) := N(L(x)), \forall x \in E$. Montrer que N' est une norme sur E .

Exercice # 3. (5 pts.) Soient E, F deux espaces normés et $f_1, f_2 : E \rightarrow F$ deux fonctions continues. Soient $A_1, A_2 \subseteq E$ deux parties fermées de E telles que $A_1 \cup A_2 = E$. Supposons que $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in A_1 \cap A_2$. Montrer que la fonction $f : E \rightarrow F$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{si } x \in A_2 \end{cases}$$

est continue. (On pourra considérer $f^{-1}(G)$, avec $G \subseteq F$ fermé.)

Exercice # 4. (5 pts.)

1. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $(x_n)_n$ une suite de E et $x \in E$. Si $x_n \not\rightarrow x$, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ tels que $\|x_{\varphi(n)} - x\| \geq \varepsilon, \forall n$.
2. Soient $K \subset E$ un compact et $(x_n)_n \subset K$ une suite dans K . Montrer que, si $(x_n)_n$ n'est pas convergente, alors on peut extraire de $(x_n)_n$ deux sous-suites qui convergent vers deux points distincts de K . (On pourra commencer par construire une sous-suite convergente (x_{n_k}) .)

Exercice # 5. (4 pts.) Soient $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, y = 0\}$, $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$. Pour chacun des ensembles $A \cup B$ et $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, déterminer s'il est ouvert, fermé ou compact dans \mathbb{R}^2 .

Exercice # 6. (5 pts.) Soit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta > 0$,

$$f(x, y) := \frac{|x||y|}{|x|^\alpha + |y|^\beta}.$$

Étudier l'existence de la limite de f en $(0, 0)$ selon les valeurs des constantes α et β . (On pourra exprimer (x, y) en coordonnées polaires.)