

Contrôle partiel
Le 11 mars 2026 – durée 90 minutes

Les documents sont interdits. Tout réponse doit être justifiée. Le barème est indicatif. Le contrôle est noté sur 20 points.

Exercice # 1. (2 pts.) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Montrer que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in E$.

Exercice # 2. (3 pts.) Soient (F, N) un espace vectoriel normé, E un espace vectoriel et $L : E \rightarrow F$ une application linéaire injective. Soit $N' : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N'(x) := N(L(x)), \forall x \in E$. Montrer que N' est une norme sur E .

Exercice # 3. (5 pts.) Soient E, F deux espaces normés et $f_1, f_2 : E \rightarrow F$ deux fonctions continues. Soient $A_1, A_2 \subseteq E$ deux parties fermées de E telles que $A_1 \cup A_2 = E$. Supposons que $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in A_1 \cap A_2$. Montrer que la fonction $f : E \rightarrow F$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{si } x \in A_2 \end{cases}$$

est continue. (On pourra considérer $f^{-1}(G)$, avec $G \subseteq F$ fermé.)

Corrigé. Avant de donner un corrigé on explique pourquoi la conclusion n'est pas évidente : l'assertion suivante est **fausse** en général :

Soit $f, f_1 : E \rightarrow F, f_1$ continue. Soit $A_1 \subset E$ t.q. $f(x) = f_1(x)$ pour tout $x \in A_1$. Alors f est continue en tout point de A_1 .

En effet, si $A_1 = [0, 1] \subset \mathbb{R} = E = F, f_1(x) = 1$ pour tout $x \in E, f(x) = 1$ pour $x \in A_1$ et $f(x) = 0$ pour $x \notin A_1$, alors f n'est pas continue en $\{0, 1\} \subset A_1$. (D'ailleurs, si on ajoute la condition que A_1 soit ouvert, l'assertion est vraie.)

Corrigé version 1 (avec les preimages) : Soit $G \subset F$ fermé. Le but est de montrer que $f^{-1}(G)$ est fermé. On a

$$f^{-1}(G) = A_1 \cap f^{-1}(G) \cup A_2 \cap f^{-1}(G)$$

De plus $A_1 \cap f^{-1}(G) = \{x \in A_1 : f(x) \in G\} = \{x \in A_1 : f_1(x) \in G\} = A_1 \cap f_1^{-1}(G)$. Comme f_1 est continue, $f_1^{-1}(G)$ est fermé, donc $A_1 \cap f_1^{-1}(G)$ est fermé (car A_1 est aussi fermé). Le même argument montre que $A_2 \cap f^{-1}(G)$ est fermé. Donc $f^{-1}(G)$ est union de deux fermés donc fermé.

Corrigé version 2 (avec les suites) : Soit $x \in A$ et $(x_n)_n$ une suite dans E qui tend vers x . Le but est de montrer que $f(x_n)$ tend vers $f(x)$. Comme $A_1 \cup A_2 = E$ au moins un des deux A_i contient une infinité des termes de la suite. Si A_i contient une infinité des termes de la suite, alors ces termes définissent une extraction $(x_{n_k})_k$ de la suite. Forcément $\lim_k x_{n_k} = x$. Comme $(x_{n_k})_k \subset A_i$ et A_i est fermé, $x \in A_i$. D'ou

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(x_{n_k}) = f_i(x) = f(x)$$

(l'égalité au milieu par continuité de f_i). Si seulement un des deux contient une infinité des termes de la suite, alors les termes l'extraction $(x_{n_k})_k$ correspond à la suite, à l'exception d'un nombre fini des termes, et donc $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Sinon, nous avons deux extractions et $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x)$ pour les deux. Comme les deux extractions ensemble contiennent tous les termes de la suite on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$. (Toute boule centrée en x contient presque tous les termes des deux extractions, donc presque tous les termes de la suite.)

Exercice # 4. (5 pts.)

1. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $(x_n)_n$ une suite de E et $x \in E$. Si $x_n \not\rightarrow x$, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ tels que $\|x_{\varphi(n)} - x\| \geq \varepsilon, \forall n$.
2. Soient $K \subset E$ un compact et $(x_n)_n \subset K$ une suite dans K . Montrer que, si $(x_n)_n$ n'est pas convergente, alors on peut extraire de $(x_n)_n$ deux sous-suites qui convergent vers deux points distincts de K . (On pourra commencer par construire une sous-suite convergente (x_{n_k}) .)

Corrigé. 1. Comme $(x_n)_n$ est une suite qui ne converge pas vers x , par la négation de la définition de la convergence on obtient

$$(*) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \text{ et } \|x_n - x\| \geq \varepsilon.$$

On extrait alors une sous-suite par récurrence. On définit $\phi(0)$ comme le plus petit entier naturel tel que $\|x_{\phi(0)} - x\| \geq \varepsilon$. Pour ce faire il suffit de poser $N = 0$ dans $(*)$ et de définir $\phi(0)$ comme le plus petit entier naturel tel que $\|x_{\phi(0)} - x\| \geq \varepsilon$.

Supposons maintenant que $\phi(0) < \dots < \phi(n)$ avec $n \geq 0$. Dans $(*)$, on pose $N = \phi(n) + 1$ et on choisit le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq N$ et $\|x_k - x\| \geq \varepsilon$. Encore une fois, $(*)$ justifie qu'un tel indice k existe. Par ailleurs, $\phi(n+1) > \phi(n)$, ce qui assure que ϕ détermine une extraction. La sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la condition de l'énoncé.

2. Soient K et $(x_n)_n$ comme dans l'énoncé. D'abord, en utilisant la compacité de K , on extrait une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge vers un élément $x \in K$. On note cette sous-suite $(x_{n_k})_k$. Comme $(x_n)_n$ n'est pas convergente, elle ne converge pas vers x . Alors, en utilisant le point 1 de l'exercice on extrait une deuxième sous-suite de $(x_n)_n$ qui satisfait la condition du point 1 :

$$(**) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_{\phi(n)} - x\| \geq \varepsilon.$$

En appliquant une deuxième fois la compacité de K , cette fois-ci à la suite $(x_{\phi(n)})_n$, on extrait de celle-ci une sous-suite convergente vers un point $y \in K$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\|x_{\phi(n)} - x\| \geq \varepsilon > 0$, la définition de la convergence montre que $x \neq y$.

Exercice # 5. (4 pts.) Soient $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, y = 0\}$, $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$. Pour chacun des ensembles $A \cup B$ et $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, déterminer s'il est ouvert, fermé ou compact dans \mathbb{R}^2 .

Corrigé. Comme $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ sont dans B on a $A \cup B = A' \cup B$ avec $A' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, y = 0\}$. Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x$ et $g(x, y) = y$. Les deux fonctions sont continues. Comme $A' = f^{-1}([-1, 1]) \cap g^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{-1, 1\})$, preimages de fermés des fonctions continues, A' et B sont fermés. Donc $A \cup B$ est fermé. Comme $A \cup B$ n'est ni \emptyset ni \mathbb{R}^2 il n'est pas ouvert. Comme B n'est pas borné, $A \cup B$ n'est pas borné non plus, donc pas compact.

On a

$$A + B = \{(x, y) + (x', y') : |x| < 1, y = 0, x' \in \{1, -1\}, y' \in \mathbb{R}\} =]-2, 0[\cup]0, 2[\times \mathbb{R}$$

Ceci est un ouvert, car produit cartésien des ouverts. Comme $A + B$ n'est ni \emptyset ni \mathbb{R}^2 il n'est pas fermé. En particulier, $A + B$ n'est pas compact.

Exercice # 6. (5 pts.) Soit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta > 0$,

$$f(x, y) := \frac{|x||y|}{|x|^\alpha + |y|^\beta}.$$

Étudier l'existence de la limite de f en $(0, 0)$ selon les valeurs des constantes α et β . (On pourra exprimer (x, y) en coordonnées polaires.)

Corrigé. Dans un premier temps, on fait un changement de variables intermédiaire qui simplifiera l'utilisation des coordonnées polaires. On pose $u = |x|^{\alpha/2}$ et $v = |y|^{\beta/2}$. Il en découle que $|x| = u^{2/\alpha}$ et $|y| = v^{2/\beta}$. On obtient donc

$$\frac{|x||y|}{|x|^\alpha + |y|^\beta} = \frac{u^{2/\alpha} v^{2/\beta}}{u^2 + v^2}.$$

Maintenant on pose $u = r|\cos(\theta)|$ et $v = r|\sin(\theta)|$. Par conséquent,

$$f(u, v) = f(r, \theta) = r^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 2} |\cos(\theta)|^{\frac{2}{\alpha}} |\sin(\theta)|^{\frac{2}{\beta}}.$$

Il y a 3 cas à discuter :

Cas 1 : $\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 2 > 0$. Dans ce cas, la limite est 0 car l'expression $|\cos(\theta)|^{\frac{2}{\alpha}} |\sin(\theta)|^{\frac{2}{\beta}}$ est bornée par 1 et que $r^{\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 2}$ tend vers 0 quand r tend vers 0.

Cas 2 : $\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 2 = 0$. Dans ce cas, on peut trouver des valeurs de θ qui donnent des limites différentes. Par exemple, $\theta = \pi/4$ donne une limite non nulle tandis que $\theta = 0$ donne une limite nulle.

Cas 3 : $\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 2 < 0$. Dans ce cas, si on fixe $\theta = \pi/4$ alors la limite est $+\infty$ tandis que $\theta = \pi/2$ donne comme limite 0. Encore une fois, il n'y a pas de limite.

Conclusion finale : en $(0, 0)$, il y a une limite si et seulement si $\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 2 > 0$. Après simplification, la condition s'écrit $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > 1$.