UE MAT2094L Analyse 4

La différentielle en bref

4 mars 2026

Cadre

- $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert
- $(F, \| \, \|_F)$ normé
- $f : U \to F$
- $a \in U$

La différentielle...

... de f en a est une (la seule !) application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to F$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + T(h) + o(h), \text{ pour } h \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } a+h \in U$$

Notation

On note $T = d_a f$, $T(h) = d_a f(h)$

Concrètement (I)

$d_a f$ est la seule application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to F$ telle que :

$$\left[(h^k) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, h^k \to 0, a + h^k \in U\right] \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{\left\|h^k\right\|_{\mathbb{R}^n}}\left[f(a+h^k) - f(a) - T(h^k)\right] \to 0$$

Concrètement (II)

$d_a f$ est la seule application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to F$ telle que :

$$\left[(h^k) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, h^k \to 0, a + h^k \in U\right] \Longrightarrow$$
$$\frac{\left\|f(a+h^k) - f(a) - T(h^k)\right\|_F}{\left\|h^k\right\|_{\mathbb{R}^n}} \to 0$$

Concrètement (III)

$d_a f$ est la seule application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to F$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + T(h) + \|h\|_{\mathbb{R}^n} A(h), \ \forall\, h \in D,$$

avec

- $D := \{h \in \mathbb{R}^n \,;\, a+h \in U\}$
- $A : D \to F$
- $A(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_F$
- A continue en $0_{\mathbb{R}^n}$: $\left[(r^k) \subset D,\, r^k \to 0_{\mathbb{R}^n}\right] \implies A(r^k) \to 0_F$