Densité
– complément au Chapitre 2. Topologie –

NB Ce texte est un complément au cours. Les notions présentées ici seront reprises en L3 dans le contexte plus général des espaces métriques. En L2, elles ne seront pas approfondies.

Le cadre pour est celui d'un espace normé $(E, \| \|)$.

L'intuition derrière la définition qui suit est qu'un ensemble B est dense dans l'ensemble A si « les points de B sont partout dans A ». Cette intuition est confirmée par la propriété (iv) de la première proposition.

Définition. Si $B \subset A \subset E$, B est « dense dans A » si $\overline{B} = \overline{A}$.

Remarque. Comme, par hypothèse, $B \subset A$, nous avons automatiquement $\overline{B} \subset \overline{A}$. Par conséquent, dans la définition ci-dessus la propriété essentielle est l'inclusion inverse $\overline{A} \subset B$.

Proposition. Si $B \subset A \subset E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) B est dense dans A.

(ii) $A \subset \overline{B}$.

(iii) Pour tout $a \in A$, il existe $(x^k) \subset B$ telle que $x^k \to a$.

(iv) Pour tout $a \in A$ et tout $r > 0$, il existe $b \in B$ tel que $b \in B(a, r)$.

Démonstration. « (i)⇒(ii) » Nous avons $A \subset \overline{A} = \overline{B}$.
« (ii)⇒(iii) » Soit $a \in A$. Alors $a \in \overline{B}$. En utilisant la caractérisation séquentielle de $\overline{B}$, il existe une suite $(x^k) \subset B$ telle que $x^k \to a$.
« (iii)⇒(iv) » Soient $a \in A$ et $r > 0$. Soit $(x^k) \subset B$ telle que $x^k \to a$. En utilisant la définition de la convergence des suites, il existe k_0 tel que $\|x^k - a\| < r, \forall\, k \geq k_0$. En particulier, $\|x^{k_0} - a\| < r$, et donc $x^{k_0} \in B$ et $x^{k_0} \in B(a, r)$.
« (iv)⇒(ii) » Pour tout $k \geq 1$, il existe $x^k \in B$ tel que $x^k \in B(a, 1/k)$. Nous avons $(x^k)_{k\geq 1} \subset B$ et

$$0 \leq \|x^k - a\| < \frac{1}{k} \to 0,$$

d'où $x^k \to a$.
« (ii)⇒(i) » Si $A \subset \overline{B}$, alors $\overline{A} \subset \overline{\overline{B}} = \overline{B}$. □

Voici des exemples fondamentaux d'ensembles denses.

Proposition.

1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Plus généralement, $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme.

3. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, alors $\mathbb{Q}^n \cap U$ est dense dans U.

Démonstration. Les preuves vont reposer sur le critère (iii) de la proposition précédente.

1. La conclusion suit du fait que tout nombre réel a est la limite d'une suite (x^k) de nombre rationnels. (Par exemple, si l'écriture décimale de a est $a = m, c_1c_2c_3\ldots$, on peut prendre $x^0 = m$, $x^1 = m, c_1$, $x^2 = m, c_1c_2$, etc.)

2. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$. De la question précédente, il existe des suites $(x_j^k)_{k\geq 0}$ de nombres rationnels telles que $x_j^k \to a_j$ lorsque $k \to \infty$, pour $j = 1, \ldots, n$. En posant $x^k := (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$, nous avons $x^k \in \mathbb{Q}^n$. Par construction, la je coordonnée de x^k est x_j^k, qui vérifie $x_j^k \to a_j$, avec a_j la je coordonnée de a. Comme, dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, la convergence d'une suite équivaut à la convergence sur chaque coordonnée, nous obtenons que $x^k \to a$.

3. Soit $a \in U$. Soit $(x^k) \subset \mathbb{Q}^n$ telle que $x^k \to a$. (Voir la question précédente.) Soit $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Soit k_0 tel que $\|x^k - a\| < r, \forall\, k \geq k_0$. Si $k \geq k_0$, alors $x^k \in B(a, r) \subset U$. Ainsi, la suite $(x^k)_{k\geq k_0}$ vérifie $(x^k)_{k\geq k_0} \subset \mathbb{Q}^n \cap U$ et $x^k \to a$, d'où la conclusion. $\square$