UE MAT2094L Analyse 4

Chapitre 2. Topologie

28 janvier 2026

Définition (boule, sphère)

Dans un espace réel normé $(E, \| \ \|)$

- $B(a,r) := \{x \in E \, ; \, \|x-a\| < r\}$ (« boule ouverte de centre a et de rayon 0 », où $a \in E$ et $r > 0$)
- $\overline{B}(a,r) := \{x \in E \, ; \, \|x-a\| \leq r\}$ (« boule fermée de centre a et de rayon r »)
- $S(a,r) := \{x \in E \, ; \, \|x-a\| = r\}$ (« sphère de centre a et de rayon r »)

Exercice $*$

- Dans $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_1)$, dessiner $B((1,2),1)$
- Dans $(\mathbb{R}^3, \| \ \|_\infty)$, dessiner $\overline{B}((2,2,2),1)$
- Dans $(\mathbb{R}^3, \| \ \|_2)$, dessiner $S(0,2)$

Point de vue métrique

- Avec d la distance associée à $\| \ \|$, on a $B(a,r) = \{x \in E\,;\, d(x,a) < r\}$, etc.
- On peut « naturellement » définir des boules et des sphères dans un espace métrique

Exercice $**$

En justifiant d'abord la propriété demandée sur un dessin, montrer que

- $B(a,r) \subset B(b, d(a,b) + r)$, $\forall\, a, b \in E$, $\forall\, r > 0$
- $x \in B(a,r) \implies [B(x, r - d(x,a)) \subset B(a,r)]$

De même dans un espace métrique

Définition (suite convergente dans $(E, \| \ \|)$)

Si $(x^k) \subset E$, $x \in E$, on a $x^k \to x$ (« $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = x$ », « x^k converge vers x », « x^k tend vers x ») si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \text{ tel que } \|x^k - x\| < \varepsilon,\ \forall k \geq k_0$$

Où placer k ?

On note plutôt (x_k), mais risque de confusion avec les coordonnées. Privilégier des notations « explicites » : $(x^k)_{k \geq 0}$, $(x_k)_{k \geq 1}$, $(x_j^k)_{k \geq 0, 1 \leq j \leq n}$

Exercice $*$

Dans $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_1)$, montrer que $\left(\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k, \dfrac{1}{k}\right) \to (e, 0)$

Exercice $*$ (unicité de la limite)

Si $x^k \to x$ et $x^k \to y$, montrer que $x = y$

Exercice $**$

- Si $x^k \to x$, $y^k \to y$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\left(x^k + \lambda y^k\right) \to (x + \lambda y)$
- Si $x^k \to x$, alors $\left\|x^k\right\| \to \|x\|$

Définition (suite extraite ou sous-suite)

Si $(x^k)_{k\geq 0}$ est une suite, les « suites extraites » ou « sous-suites » de $(x^k)_{k\geq 0}$ sont les suites de la forme $(x^{\varphi(\ell)})_{\ell\geq 0}$, avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ « extraction » (c'est-à-dire fonction strictement croissante)
On note également $(x^{k_\ell})_{\ell\geq 0}$, où $k_\ell = \varphi(\ell)$

Exercice $*$

Compléter et montrer l'énoncé suivant : « $x^k \to x \implies x^{\varphi(k)} \to x$ »

Proposition

Si $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ sont deux normes équivalentes sur E, on a $x^k \to x$ dans $(E, \| \ \|)$ si et seulement si $x^k \to x$ dans $(E, \| \ \|')$

Proposition

Dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$, on a $x^k \to x$ si et seulement si $x_j^k \to x_j$, $j = 1, \ldots, n$

Corollaire

Dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$, on a $x^k \to x$ si et seulement si $x_j^k \to x_j$, $j = 1, \ldots, n$

Exercice $* * *$

Soient : E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots e_n\}$ une base de E. On identifie un vecteur $x \in E$ avec ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$. Montrer que, pour $\| \ \|$ norme sur E, $\left(x^k\right) \subset E$ et $x \in E$, on a $x^k \to x$ si et seulement si $x_j^k \to x_j$, $j = 1, \ldots, n$

Définitions (voisinage, ensemble ouvert)

Dans un espace normé $(E, \| \ \|)$ (ou métrique !)

- V est un voisinage de a (avec $V \subset E$ et $a \in E$) si et seulement si V contient une boule de centre a : $\exists\, r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$
- U est ouvert si et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points : $\forall\, a \in U$, $\exists\, r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$

Cela va sans dire...

« A priori », dans la définition d'un ouvert, le rayon r dépend de a

Exercice ∗

$B(a,r)$ est un ouvert

Exercice ∗

Énoncer de manière rigoureuse et montrer le résultat suivant : Si on remplace une norme par une norme équivalente, les voisinages et les ouverts restent les mêmes. Examiner dans cette perspective les autres notions de ce chapitre

Exercice ∗

Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, montrer que $U := \left\{x \in \mathbb{R}^n ; 0 < x_n < 1\right\}$ est un ouvert

Exercice ∗∗

On suppose $E \neq \{0\}$. Si $\|a\| = r$, montrer que $\overline{B}(0,r)$ n'est pas une voisinage de a. En particulier, $\overline{B}(0,r)$ n'est pas ouverte

Définition (fermé)

Dans un espace normé $(E, \| \ \|)$ (ou métrique), F est fermé si et seulement si $E \setminus F = F^c$ est ouvert

Proposition (caractérisation « séquentielle » des fermés)

F est fermé si et seulement si :

$$\left[(x^k) \subset F,\ x^k \to x \right] \Longrightarrow x \in F$$

« pour toute suite convergente de F, la limite est encore dans F »

Exercice $*$

$\overline{B}(a, r)$ est un fermé

Proposition (propriétés des ensembles)

- Une union *quelconque* d'ouverts est un ouvert
- Une intersection *quelconque* de fermés est un fermé
- Une intersection *finie* d'ouverts est un ouvert
- Une union *finie* de fermés est un fermé

Définitions (adhérence, intérieur, frontière)

Dans un espace normé $(E, \| \ \|)$ (ou métrique), si $A \subset E$

- L'« adhérence » $\overline{A}$ de A est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé qui contient A (« A barre »)
- L'« intérieur » $\mathring{A}$ de A est le plus grand ouvert contenu dans A
- La « frontière » (ou le « bord ») ∂A de A est $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$

Proposition

Les définitions de $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ sont correctes

Proposition (caractérisation séquentielle de l'adhérence)

Dans $(E, \| \ \|)$ (ou un espace métrique), $\overline{A} = \{x \in E ; \exists (x^k) \subset A \text{ tq } x^k \to x\}$

Exercice $*$

Compléter l'énoncé suivant et le montrer : ∂A est un fermé

Exercice $*$

Dans $(E, \| \ \|)$, avec $E \neq \{0\}$, déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de $B(a, r)$ et de $\overline{B}(a, r)$

Exercice $**$

Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de $A := \{x \in \mathbb{R}^n ; x_n > 0\}$

Proposition

Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$
(Également vrai dans un espace normé $(E, \| \ \|)$, avec une preuve légèrement différente)

Proposition

On munit $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{n+m}$ de normes

- Si F est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et G est un fermé de $\mathbb{R}^m$, alors $F \times G$ est un fermé de $\mathbb{R}^{n+m}$
- De même pour des ouverts

Définition (borné, compact)

Dans un espace normé $(E, \| \ \|)$

- $B \subset E$ est « borné » si et seulement si il existe R tel que $\|x\| \leq R$, $\forall x \in A$
- $K \subset E$ est « compact » si et seulement pour toute suite $(x^k) \subset K$ il existe une sous-suite $(x^{k_\ell})_{\ell \geq 0}$ et un $x \in K$ tels que $\lim_{\ell \to \infty} x^{k_\ell} = x$

Exercice $**$

Préciser et montrer les propriétés suivantes

- Si on remplace une norme par une norme équivalente, les ensembles bornés ou compacts sont les mêmes
- Si on munit $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{n+m}$ de normes, alors : un produit d'ensembles bornés est borné, et un produit d'ensembles compacts est compact

Exercice $*$

Préciser et montrer la propriété suivante : un ensemble compact est fermé et borné

Théorème de Heine-Borel (caractérisation des compacts dans $\mathbb{R}^n$)

Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, un ensemble est compact si et seulement si il est fermé et borné

Exercice $**$

- De même dans un espace normé de dimension finie
- En particulier, dans un espace normé de dimension finie les boules fermées et les sphères sont compactes

Exercice $***$ (lemme de Riesz)

Si, dans un espace normé $(E, \| \ \|)$, une boule fermée est compacte, alors l'espace est de dimension finie

Exercice ∗

Préciser et montrer les résultats suivants

- Un ensemble fini est compact
- Si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et $\overset{\circ}{\widehat{\mathring{A}}} = \mathring{A}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Exercice ∗

Préciser et montrer le résultat suivant : dans $\mathbb{R}$ muni d'une norme, un intervalle est ouvert (respectivement fermé) si et seulement si il est ouvert (respectivement fermé) !

Définition (ensemble dense)

Dans un espace normé $(E, \| \ \|)$, avec $B \subset A \subset E$, B est « dense dans A » si et seulement si $\overline{B} = \overline{A}$

Proposition (caractérisation des parties denses)

Dans un espace normé $(E, \| \ \|)$, $B \subset A$ est dense dans A si et seulement si : $\forall\, a \in A$, $\forall\, r > 0$, $B(a, r)$ contient (au moins) un point de B

Exercice $*$

$\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme

Exercice $**$

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, alors $\mathbb{Q}^n \cap U$ est dense dans U