UE MAT2094L Analyse 4

Chapitre 1. Normes

21 janvier 2026

Motivation

- Dans $\mathbb{R}$, la distance « naturelle » entre les points x et y est $d(x,y) := |x-y|$
- Sur Terre ?
- À la SNCF ?
- Dans un espace vectoriel (réel), il est « naturel » de demander qu'une distance soit « compatible » avec les opérations d'espace vectoriel : $d(x+z,y+z) = d(x,y)$, $d(\lambda x,\lambda y) = |\lambda| d(x,y)$, etc.
- Ces propriétés sont vérifiées si on part d'une **norme** (voir plus loin)
- Focus Analyse 4 : normes dans $\mathbb{R}^n$
  Focus L3 : normes dans un espace vectoriel « général »

Définition d'une norme

Si E est un espace vectoriel **réel**, une norme sur E est une application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :

1. Positivité : $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in E$
2. Séparation : $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. Homogénéité : $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \ \forall \lambda \in R, \ \forall x \in E$
4. Inégalité triangulaire : $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in E$

Place des quantificateurs

Inhabituelle...

Exercice $*$

1. Dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ est une norme
2. Dans $\mathbb{R}$, les normes sont (précisément) les applications de la forme $x \mapsto \alpha |x|$, avec $\alpha > 0$ constante

Remarques

- Il y a 0, 0 et 0...
- En général, le plus difficile est de montrer l'inégalité triangulaire

Proposition (inégalité triangulaire inverse/deuxième inégalité triangulaire)

$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \ \forall x, y \in E$

Exercice $**$ (La définition d'une norme est redondante)

Si E est un espace vectoriel **réel**, alors $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ est une norme si et seulement si :

2'. $\|x\| = 0 \implies x = 0$

3. Homogénéité : $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \ \forall \lambda \in R, \ \forall x \in E$
4. Inégalité triangulaire : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in E$

$\mathbb{R}^n$

- Les points de $\mathbb{R}^n$ sont notés $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, etc.
- Opérations « naturelles » sur $\mathbb{R}^n$?
- Les suites de points de $\mathbb{R}^n$ sont notés $(x^k)_{k\geq 0}$, $(x^k)_{k\geq 1}$, etc., avec $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$

Exercice $*$ (La norme $\| \ \|_1$)

$x \mapsto \|x\|_1 := |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \sum_{j=1}^{n} \left|x_j\right|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Exercice $*$ (La norme $\| \ \|_\infty$)

$x \mapsto \|x\|_\infty := \max\left(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\right) = \max_{1\leq j\leq n} \left|x_j\right|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Exercice $*$ (La norme $\| \ \|_2$)

$$x \mapsto \|x\|_2 := \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2} = \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2\right)^{1/2} \text{ est une norme sur } \mathbb{R}^n$$

Ingrédient-clé : l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n)^2 \leq \Big((a_1)^2 + (a_2)^2 + \cdots + (a_n)^2\Big) \times \Big((b_1)^2 + (b_2)^2 + \cdots + (b_n)^2\Big)$$

ou encore $\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} (a_j)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} (b_j)^2\right)^{1/2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$
$\forall\, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

Exercice $*$ (La norme $\| \ \|_p$, $1 < p < \infty$)

$x \mapsto \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Exercice $*$ (Ingrédients-clés)

On pose $q := \dfrac{p}{p-1}$ (le « conjugué de p »). On a

- $1 < q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $pq = p + q$
- Inégalité de Young $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$, $\forall\, a, b \geq 0$
- Inégalité de Hölder $\left|\sum_{j=1}^n a_j b_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)^{1/q}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$

Définition (distance « associée » à une norme)

Si $\| \ \|$ est une norme sur l'espace vectoriel E, on pose $d(x,y) := \|x-y\|$, $\forall\, x,y \in E$ ($d(x,y)$ est la « distance » entre x et y)

Exercice $*$ (Propriétés de la distance)

La distance a les propriétés suivantes :

1. Positivité : $d(x,y) \geq 0$, $\forall\, x,y \in E$
2. Séparation : $d(x,y) = 0 \iff x = y$
3. Symétrie : $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall\, x,y \in E$
4. Inégalité triangulaire : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall\, x,y,z \in E$

Distance abstraite

Une application d avec les propriétés 1.–4. ci-dessus, sur un ensemble E (pas nécessairement un espace vectoriel), est une « distance »

Normes « usuelles » sur $\mathbb{R}^n$

- Les normes le plus souvent utilisées sont $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$, et dans une moindre mesure $\| \|_p$, $1 < p < \infty$
- Mais il existe une infinité d'autres normes

Exercice $* * *$ (Normes sur un espace vectoriel quelconque E)

Sur tout espace vectoriel, il existe une norme

Exercice $* *$ (Pourquoi partir d'une norme)

Soit d une distance sur l'espace vectoriel réel E. Si d est « compatible » avec la structure d'espace vectoriel, au sens où :

5. $d(x+z, y+z) = d(x,y)$, $\forall\, z, y, z \in E$
6. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$, $\forall\, x, y \in E$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

alors il existe une norme $\| \|$ sur E telle que $d(x,y) = \|x - y\|$, $\forall\, x, y \in E$
Et réciproquement

Définition (équivalence des normes)

Deux normes $\| \|, \| \|'$ sur E sont « équivalentes » si et seulement si il existe deux nombres $m, M \in]0, \infty[$ tels que $m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|, \ \forall x \in E$

Exercice $**$

La relation définie ci-dessus est bien une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E

Théorème (équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$)

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes
De même pour un espace vectoriel réel de dimension finie

Exercice $***$

Si toutes les normes sur un espace vectoriel réel E sont équivalentes, alors l'espace est de dimension finie