

UE MAT2094L Analyse 4

Chapitre 4. Limites

11 février 2026

Cadre général

- $(E, \| \cdot \|_E)$, $(F, \| \cdot \|_F)$ espaces normés (ou métriques)
- $A \subset E$
- $f : A \rightarrow F$
- $a \in \overline{A} \setminus A$
- $\ell \in F$

Cadre restreint

- $U \subset E$ ouvert tel que $0 \in U$
- $f : U \setminus \{0\} \rightarrow F$

Définition (limite dans le cadre restreint)

$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \ell$ si et seulement si

$$\left[(h^k) \subset U \setminus \{0\}, h^k \rightarrow 0 \right] \implies f(h^k) \rightarrow \ell$$

Exercice **

- Réécrire, comme en L1, la caractérisation de la limite « avec ε et δ »
- Proposer la définition de $\lim_{h \rightarrow a} f(h) = \ell$, et de $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \infty$

Proposition (limite et continuité)

Soient $f : U \setminus \{0\} \rightarrow F$, $\ell \in F$. Soit $\tilde{f} : U \rightarrow F$, $\tilde{f}(h) = \begin{cases} f(h), & \text{si } h \neq 0 \\ \ell, & \text{si } h = 0 \end{cases}$. Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \ell \iff \tilde{f} \text{ est continue en } 0$$

Exercice *

Compléter et montrer le résultat suivant : si $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = L$ et $\lim_{h \rightarrow L} f(h) = \ell$, alors $\lim_{h \rightarrow 0} f(g(h)) = \ell$

Définitions (notations de Landau)

Soient $f : U \rightarrow F$, $g : U \rightarrow G$ (G normé)

- Si $f(h) = o(h)$ **quand $h \rightarrow 0$** si et seulement si $f(0) = 0$ et
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$
 (« $f(h)$ est beaucoup plus petit que h »)
- $g(h) = O(h)$ **quand $h \rightarrow 0$** si et seulement si il existe une constante C telle que $\|g(h)\|_G \leq C\|h\|_E$, $\forall h \in U$ (« $g(h)$ est de l'ordre de h »)

Proposition

- Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow G$, T linéaire, alors $T(h) = O(h)$
- Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(h) = o(h)$, $T : \mathbb{R}^n \rightarrow G$, T linéaire, alors $T(f(h)) = o(h)$
- $f(h) = o(h)$ si et seulement si $f(h) = \|h\|_E F(h)$, avec $F(0) = 0$ et F continue en 0