UE MAT2094L Analyse 4

Chapitre 3. Fonctions continues

4 février 2026

Cadre

- $(E, \| \, \|_E)$, $(F, \| \, \|_F)$ espaces normés (mais voir la remarque suivante)
- $A \subset E$, $B \subset F$, $a \in A$
- $f : A \to B$

Définition (fonction continue)

- f est « continue en a » si et seulement si $[(x^k) \subset A, x^k \to a] \implies [f(x^k) \to f(a)]$
- f est « continue » si et seulement si f continue en tout $a \in A$

Remarques

- La définition de la continuité est « métrique »
- Si $F = \mathbb{R}$, par défaut la norme est $| \, |$
- f est continue si et seulement si

$$\left[(x^k) \subset A, a \in A, x^k \to a\right] \implies \left[f(x^k) \to f(a)\right]$$

Exercice $*$

Préciser et prouver l'énoncé suivant : Si on remplace les normes par des normes équivalentes, les fonctions continues restent les mêmes

Exercice $**$

- Dans $\mathbb{R}$, montrer que la définition de la continuité est celle du L1
- Énoncer et montrer la caractérisation de la continuité « avec ε et δ »

Exercice $*$ (exemple fondamental)

Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, les « monômes » (applications de la forme $x \mapsto C(x_1)^{\alpha_1}(x_2)^{\alpha_2}\cdots(x_n)^{\alpha_n}$, avec $C \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ constantes) sont continus

Exercice $*$

- L'application $\|\ \|_E : E \to \mathbb{R}$ est continue
- Pour toute norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{R}^n$, $x \mapsto \|x\|$ est continue sur $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_1)$

Exercice $*$

Préciser et prouver les propriétés suivantes

- Si f, g sont continues et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est continue
- Un produit de fonctions continues est une fonction continue
- Une composée de fonctions continues est une fonction continue

Proposition (caractérisation des fonctions continues)

- $f : E \to F$ est continue si et seulement si $f^{-1}(U)$ est ouvert, $\forall\, U \subset F$ ouvert
- $f : E \to F$ est continue si et seulement si $f^{-1}(G)$ est fermé, $\forall\, G \subset F$ fermé

Remarque

Il existe des caractérisations analogues de la continuité pour $f : A \to B$, qui reposent sur la notion d'ouvert ou fermé de A ou B (ce sera vu en L3)

Exercice $*$

Préciser et montrer le résultat suivant : si $f : A \to B \subset \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, alors f est continue si et seulement si f_j est continue, $j = 1, \ldots, n$

Définition (fonction lipschitzienne)

$f : A \to B$ est « lipschitzienne » si et seulement si il existe une constante L telle que

$$\left\|f(x) - f(y)\right\|_F \leq L\|x - y\|_E, \ \forall x, y \in A$$

(On peut préciser : f est « L-lipschitzienne ») De même dans des espaces métriques

Exercice $**$

Une fonction lipschitzienne est continue

Théorème des bornes atteintes (de Weierstrass)

Une fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$, avec K compact, atteint son maximum et son minimum : il existe $\underline{x}, \overline{x} \in K$ tels que $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x})$, $\forall x \in K$

Exercice $*$

Dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$, $S(0,1)$ est compacte

Théorème (équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$)

Deux normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Une suite bornée de $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme contient une sous-suite convergente

Théorème de Heine-Borel (caractérisation des compacts dans $\mathbb{R}^n$)

Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, un ensemble est compact si et seulement si il est fermé et borné

Exercice $**$

Si $f : A \to B$ est continue et $K \subset A$ est compact, alors $f(K)$ est compact

Exercice $**$

Préciser et montrer le résultat suivant : Si $x, y \in E$, alors
$\mathbb{R} \ni t \mapsto (1-t)x + ty$ est continue

Exercice $**$

Préciser et montrer le résultat suivant : Si $f : \mathbb{R}^n \to F$ est continue et si
$m < n$, alors $g : \mathbb{R}^m \to F$, $g(x_1, \dots, x_m) := f(x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$ est continue

Exercice $**$

Préciser et montrer le résultat suivant : Si $f : A \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est continue, alors
$\dfrac{1}{f} : A \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est continue
(Plus difficile) De même si $f : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$