UE MAT2094L Analyse 4

Chapitre 8. Extrema

25 mars, 1er et 8 avril 2026

Cadre et objectifs

- Trouver le minimum/maximum d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Étudier également le cas où U n'est plus un ouvert, mais est un ensemble donné par des « contraintes »
- Mettre en évidence le rôle des dérivées d'ordre 1 et 2 dans cette étude

Rappels (fonctions réelles $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ ouvert)

- Si x_0 est un point d'extremum local (maximum local, minimum local) de f et f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$ (théorème de Fermat)
- La réciproque est fausse : si $f'(x_0) = 0$ (x_0 est un point critique de f), x_0 n'est pas nécessairement un extremum local
- Si, de plus f est dérivable sur I et deux fois dérivable en x_0, alors $f''(x_0) \leq 0$ en un maximum local/$f''(x_0) \geq 0$ en un minimum local
- Réciproque partielle de ce qui précède : Si x_0 est un point critique de f et $f''(x_0) < 0/f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un maximum local/minimum local

Exercice $*$

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, proposer les définitions de point de maximum, minimum, extremum, maximum local, minimum local, extremum local

Cadre

$f : U \to \mathbb{R}$, avec $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert

Théorème de Fermat

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable et a est un point d'extremum local de f, alors $d_a f = 0$ (a est un point critique de f)
De manière équivalente, $\nabla f(a) = 0$

Définition (point critique)

a est un « point critique » de f si f est différentiable en a et $d_a f = 0$ (ou $\nabla f(a) = 0$)

Rappels (matrices positives)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique

- $A \geq 0$ (A est « positive ») si $(Av) \cdot v \geq 0, \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n$
- (Caractérisation des $A \geq 0$) $A \geq 0 \iff$ les valeurs propres (qui sont réelles) de A sont ≥ 0
- $A > 0$ (A est « définie positive ») si $(Av) \cdot v > 0, \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- (Caractérisation des $A > 0$) $A > 0 \iff$ les valeurs propres de A sont > 0
- De même pour $A \leq 0$ et $A < 0$

Exercice $*$

Donner des exemples de matrices symétriques : $\geq 0, > 0, \leq 0, < 0$ et d'aucun de ces types

Théorème (conditions nécessaires à l'ordre 2)

Si f est deux fois différentiable et a est un point de maximum local/minimum local de f, alors $H_a(f) \leq 0 / H_a f \geq 0$

Théorème (conditions suffisantes à l'ordre 2)

Soient f deux fois différentiable et a un point critique de a

- Si $H_a f < 0$, alors a est un point de maximum local (strict) de f
- Si $H_a f > 0$, alors alors a est un point de minimum local (strict) de f
- Si H_a a au moins une valeur propre > 0 et une valeur propre < 0, a est un « point-selle » de f : il existe des directions dans lesquelles a est un point de maximum local strict de f et des directions dans lesquelles f est un point de minimum local strict
- Dans les cas restants, a n'est pas nécessairement un extremum local ou un point-selle

Exercice $*$

Étudier la nature (extremum local, global, etc.) des points critiques de

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = 2x^2 - 4x + 4xy + 2y^2 - 8y + y^4$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\alpha xy$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$ paramètre)

Objectifs

Modéliser et étudier quelques exemples simples d'« optimisation sous contrainte(s) »

Exercice $*$

Modéliser les problèmes suivants

- Parmi les parallélépipèdes rectangles de volume 1, en trouver un de superficie minimale
- Une personne peut courir sur la plage à la vitesse de 10 km/h et nager à la vitesse de 3 km/h. Trouver le temps minimum dont elle a besoin pour relier un point donné sur la plage à un point donné dans la mer
- Trouver l'emplacement idéal d'un nœud de raccordement optique desservant trois quartiers d'une commune
- Parmi les triangles rectangles de périmètre 1, en trouver un d'aire maximale

Définitions (optimisation sous contrainte(s), contraintes actives)

- Un problème d'« optimisation sous contraintes » est de la forme

$$(\mathrm{P})\quad \min\{f(x)\,;\, x \in F\}, \text{ avec}$$

$$F = \{x \in V\,;\, g_1(x) = 0, \ldots, g_k(x) = 0, h_1(x) \leq 0, \ldots, h_\ell(x) \leq 0\},$$

où $f, g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_\ell : V \to \mathbb{R}$

- En un point $x \in F$, les « contraintes actives » sont $g_1, \ldots, g_k$ et les h_j telles que $h_j(x) = 0$

Dans ce cours

- Nous nous intéressons au cas où $V \subset \mathbb{R}^n$
- Deux questions principales : (i) donner des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution du problème d'optimisation ; (ii) énoncer et utiliser l'analogue du théorème de Fermat dans ce cas

Définition (fonction coercive)

Une fonction $f : F \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est « coercive » (sur F) si $\lim\limits_{\substack{x \in F \\ \|x\| \to \infty}} f(x) = \infty$

Proposition (minimum d'une fonction coercive)

Une fonction continue et coercive sur $F \subset \mathbb{R}^n$ fermé a un point de minimum

Corollaire (existence d'une solution de (P))

(P) a une solution si : (i) f est continue et F est compact ; (ii) f est continue et coercive et F est fermé

Stratégie de résolution de (P)

- Si F est fermé, utiliser le corollaire précédent
- Si F n'est pas fermé, étudier le problème de minimisation sur $\overline{F}$ et montrer que les solutions obtenues sont dans F

Théorème (conditions de Fritz John)

Supposons : (i) f et les contraintes de (P) de classe C^1 ; (ii) a solution de (P). Si les contraintes actives en a sont $m_1, \dots, m_p$, la famille (de vecteurs de $\mathbb{R}^n$) $\{\nabla f(a), \nabla m_1(a), \dots, \nabla m_p(a)\}$ est liée : il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, pas tous nuls, tels que $\lambda_0 \nabla f(a) + \lambda_1 \nabla m_1(a) + \cdots + \lambda_p \nabla m_p(a) = 0$
De plus, λ_0 et les λ correspondant à des h_j sont du même signe

Concrètement, pour trouver les solutions potentielles a de (P)

On résout, pour chaque choix des contraintes $m_1, \dots, m_p$, le système (S)
$\lambda_0 \nabla f(a) + \lambda_1 \nabla m_1(a) + \cdots + \lambda_p \nabla m_p(a) = 0, m_1(a) = 0, \dots, m_p(a) = 0$

Corollaire (cas d'une seule contrainte)

Soit (P) $\min\{f(x) ; h(x) \leq 0\}$, avec $f, h \in C^1(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R})$. Si a solution de (P) :

- Soit $h(a) < 0$ et alors $\nabla f(a) = 0$
- Soit $h(a) = 0$ et alors $\nabla f(a)$ et $\nabla h(a)$ sont colinéaires

Exercice $*$

Que devient le théorème de Fritz John pour un problème de maximisation ?

Exercice $*$

Que devient le théorème de Fritz John si la seule contrainte est $g(x) = 0$?

Exercice $*$

Parmi les parallélépipèdes rectangles de volume 1, en trouver un de superficie minimale

Exercice $*$

Parmi les triangles rectangles de périmètre 1, en trouver un d'aire maximale

Exercice $*$

Trouver l'emplacement idéal d'un nœud de raccordement optique desservant trois quartiers de population égale d'une commune