

UE MAT2094L Analyse 4

Chapitre 5. Différentielle

25 février 2026

Motivation Cadre : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

$$f \text{ dérivable en } a \iff \exists f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0 \iff f(a+h) - f(a) - f'(a)h = o(h)$$

Définition (différentielle) Cadre : $f : U \rightarrow F$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, F normé

- f est différentiable en $a \iff \exists T : \mathbb{R}^n \rightarrow F$ linéaire telle que $f(a+h) - f(a) - T(h) = o(h)$ (dans $\mathbb{R}$, $T(h) = f'(a)h$)
- Si T existe, on note $d_a f = T$, $d_a f(h) = T(h)$

Lycée, **L1** : dérivée; **L2** : différentielle dans $\mathbb{R}^n$ (ou un espace normé de dimension finie); **L3** : différentielle dans un espace normé

Exercice *

Préciser et prouver : f différentiable en $a \implies f$ continue en a

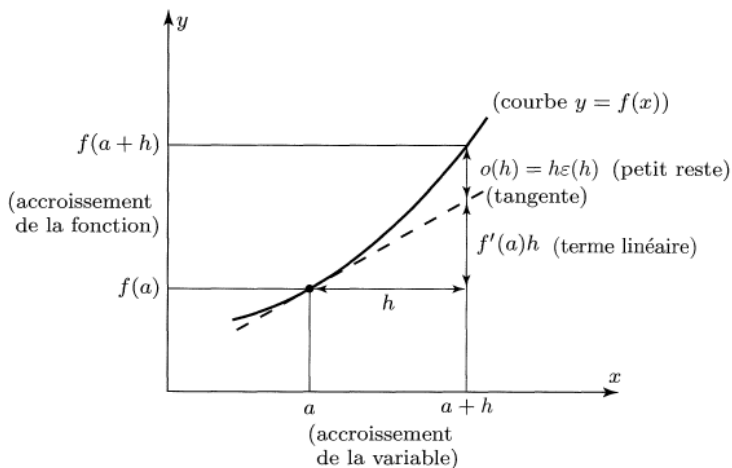


Figure. Le b.a-ba du calcul différentiel :

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + h\varepsilon(h).$$

Cadre

U ouvert de $\mathbb{R}^n$, F normé, $f : U \rightarrow F$, $a \in F$, $j \in \{1, \dots, n\}$

Définition (dérivée partielle)

Sous réserve d'existence, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a)$

$\vdash$ la dérivée en a_j de $x_j \mapsto (a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$
(« $d f$ sur $d x_j$ », ou « $d j f$ »)

Exercice *

Déterminer

- $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$, avec $f(x, y) := x^2 y$
- $\partial_3 f(1, 0, 2)$, avec $f(x_1, x_2, x_3) := |x_1 + x_2 - x_3|$

Proposition (différentielle et dérivées partielles)

Si f est différentiable en a , alors f a des dérivées partielles en a et

$$\partial_j f(a) = d_a f(e_j), \quad d_a f(h) = \sum_{j=1}^n h_j \partial_j f(a)$$

Corollaires

- La différentielle $d_a f$, si elle existe, est unique
- $d_a(f + g) = d_a f + d_a g$ (préciser l'énoncé)

Théorème (dérivées partielles continues et différentielle)

Si $F = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^m$), f a des dérivées partielles *en tout point de U* , et si les dérivées partielles sont continues en a , alors f est différentiable en a

Définition (fonction de classe C^1)

f est de classe C^1 si et seulement si les dérivées partielles $\partial_j f$ existent et sont continues ($f \in C^1(U; F)$)

« Encodage » de la différentielle

But : décrire la différentielle via un vecteur ou une matrice

Exercice *

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, alors f est différentiable si et seulement si f_j est différentiable, $j = 1, \dots, m$

Définitions (gradient, matrice jacobienne)

- Si $f : U \rightarrow F$ est différentiable, $\nabla f := \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}$ (« nabra » f)
- Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable, $Jf := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \partial_2 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix}$
(« matrice jacobienne » de f)

Formules « compactes »

- Si $f : U \rightarrow F$ est différentiable, $d_a f(h) = h \nabla f(a)$, $\forall a \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n$
- Ou, en écrivant les points de $\mathbb{R}^n$ à la verticale,
 $d_a f(h) = h \cdot \nabla f(a)$, $\forall a \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n$
- Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable, $d_a f(h) = h^t [Jf(a)]$, $\forall a \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n$
- Ou, en écrivant les points de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$ à la verticale,
 $d_a f(h) = Jf(a)h$, $\forall a \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n$
- Convention la plus utilisée : vecteurs à la verticale dans les formules compactes

Exercice * (formule de Taylor à l'ordre 1)

Préciser les hypothèses et montrer les formules « de Taylor à l'ordre 1 » suivantes

- $f(a+h) = f(a) + h \cdot \nabla f(a) + o(h)$
- $f(a+h) = f(a) + Jf(a)h + o(h)$

La règle de la chaîne au lycée

$f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables $\implies (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$

Théorème (règle de la chaîne)

V ouvert de $\mathbb{R}^m$, G espace normé, $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow G$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d_a(g \circ f) = (d_{f(a)}g) \circ (d_af)$

Exercice *

Préciser les énoncés et montrer les propriétés suivantes

- Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow F$ linéaire, alors $d_a T(h) = T(h)$
- Si $[x; y] \subset U$, $\frac{d}{dt}f((1-t)x + ty) = (x - y) \cdot [(\nabla f)((1-t)x + ty)]$
- $d_a(fg) = f(a)d_ag + g(a)d_af$ (composer le couple (f, g) et $(x, y) \mapsto xy$)
- Écrire la formule de $\partial_j(g \circ f)$ en fonction des dérivées partielles de f , g

Exercice *

Préciser les questions posées et y répondre

- Que devient la règle de la chaîne si $n = 1$?
- Calculer la dérivée de $t \mapsto f(t, t^2)$
- Calculer les dérivées partielles de $(r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$

Théorème (des accroissements finis)

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, et $[x; y] \subset U$, alors

- Il existe $z \in [x; y]$ tel que $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot \nabla f(z)$ (« TAF »)
- $|f(y) - f(x)| \leq \sup_{z \in [x; y]} \|\nabla f(z)\|_2 \|x - y\|_2$ (« IAF »)

Exercice **

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable et $d_a f = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$, alors f est constante