UE MAT2094L Analyse 4

Chapitre 9. Convexité

8 et 22 avril 2026

Objectifs

Transférer à des fonctions convexes $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des propriétés connues des fonctions convexes $g: I \to \mathbb{R}$

Rappels (fonctions convexes $g: I \to \mathbb{R}$)

- g est « convexe » sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si
  $g((1-t)x+ty) \leq (1-t)g(x)+tg(y),\ \forall\, x,y \in I,\ \forall\, t \in [0,1]$
  (Concave si l'inégalité est inversée)
- Pour g dérivable :g convexe $\iff$ g' croissante
  $\iff g(y) \geq g(x)+(y-x)g'(x),\ \forall\, x,y \in I$
- Pour g deux fois dérivable : g convexe $\iff$ $g''(x) \geq 0,\ \forall\, x \in I$

Quid dans $\mathbb{R}^n$? (Définition des fonctions convexes dans $\mathbb{R}^n$)

- (Pendant de I) $C \subset \mathbb{R}^n$ (ou $C \subset E$) est convexe si $[x;y] \subset C,\ \forall\, x,y \in C$
- $f: C \to \mathbb{R}$ est convexe si
  $f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y),\ \forall\, x,y \in C,\ \forall\, t \in [0,1]$

Cadre

$f : C \to \mathbb{R}$, avec $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe

Proposition (transfert de la convexité)

Soit $g_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_{x,y}(t) := f((1-t)x + ty)$, $\forall\, x, y \in C$, $\forall\, t \in [0,1]$
Nous avons f convexe $\iff$ $g_{x,y}$ convexe, $\forall\, x, y \in C$ (condition à vérifier pour chaque x, y)

Proposition (convexité et différentiabilité)

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert (convexe)

- Pour f différentiable : f convexe $\iff (\nabla f(y) - \nabla f(x)) \cdot (y - x) \geq 0$ (∇f est monotone) $\iff f(y) \geq f(x) + [\nabla f(x)] \cdot (y - x)$, $\forall\, x, y \in C$
- Si f est deux fois différentiable, f convexe $\iff H_a f \geq 0$, $\forall\, a \in C$

Définition (fonction monotone)

$h : C \to \mathbb{R}^n$ est « monotone » si $(h(y) - h(x)) \cdot (y - x) \geq 0$, $\forall\, x, y \in C$

Rappel (convexité et théorème de Fermat)

Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $g : I \to \mathbb{R}$ est convexe et dérivable, x_0 est un point de minimum de $g \iff g'(x_0) = 0$

Proposition (convexité et théorème de Fermat)

Si C est ouvert (convexe) et $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe et différentiable, $a \in C$ est un point de minimum de $f \iff d_a f = 0 (\iff \nabla f(a) = 0)$

Exercice $*$

Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = (Ax) \cdot x + b \cdot x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

- Montrer que f est convexe $\iff A \geq 0$
- Si $A > 0$, montrer que f a exactement un point de minimum a. Quelle est l'équation satisfaite par a ?