UE MAT2094L Analyse 4

Chapitre 7. Fonctions de classe C^k

18 et 25 mars 2026

$f : I \subset \mathbb{R} \to F$ vs $f : U \subset \mathbb{R}^n \to F$

- Si $f : I \subset \mathbb{R} \to F$, f est deux fois dérivable si f et f' sont dérivables
- Quid si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to F$? f est différentiable s'il existe $U \in a \mapsto d_a f$
- f deux fois différentiable si $U \ni a \mapsto d_a f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; F)$ est différentiable
- Point de vue correct mais conceptuellement difficile, qui sera développé en L3 (avec $U \subset E$ et E normé quelconque)
- Compromis L2 : adopter un point de vue qui ne marche que pour $U \subset \mathbb{R}^n$ et repose sur les dérivées partielles

Définition (dérivées partielles)

- Si $f = f(x, y, z, \ldots)$, sous réserve d'existence,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial_y \partial_x f := \partial_y(\partial_x f), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \partial_y^2 := \partial_y(\partial_y f), \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y^2} := \partial_z(\partial_y^2 f) \ldots$$

- L'« ordre » d'une dérivée partielle est le nombre de dérivations partielles qu'elle comprend

Définitions (fonctions k fois différentiables et de classe C^k, $k \geq 2$)

- f est « k fois différentiable » si elle a des dérivées partielles d'ordre $1, 2, \ldots, k-1$ et si les dérivées partielles d'ordre $k-1$ sont différentiables
- f est « (de classe) C^k » si elle a des dérivées partielles d'ordre $1, 2, \ldots, k$ et les dérivées partielles d'ordre k sont continues ($f \in C^k$)
- f est « (de classe) C^∞ » si elle a des dérivées partielles de tout ordre, continues ($f \in C^\infty$)

Exercice $*$

- Si $F = \mathbb{R}^m$, $f \in C^k \implies f$ k fois différentiable
- Si $F = \mathbb{R}^m$ et $\ell < k$, f k fois différentiable $\implies f \in C^\ell$

Exercice $* * *$

- Les conclusions de l'exercice précédent sont vraies pour F quelconque
- f deux fois différentiable $\iff$ f est différentiable et $U \ni a \mapsto d_a f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; F)$ est différentiable

Théorème (de symétrie) de Schwarz

Si $f \in C^2(U;\mathbb{R}^m)$, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_p} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_j}$, $1 \leq j, p \leq n$

Plus généralement, si $f \in C^k(U;\mathbb{R}^m)$, l'ordre de dérivation ne compte pas dans les dérivées partielles d'ordre $\leq k$

Un résultat plus général (niveau L3)

Si $f : U \to F$ est deux fois différentiable et $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right) = \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial f}{\partial w}\right)$

Notations compactes

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: (i) $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$; (ii) $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$; (iii) $\alpha! := (\alpha_1)! \cdots (\alpha_n)!$; (iv) sous réserve d'existence, $\partial^\alpha f := \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \dfrac{\partial^{\alpha_{n-1}}}{\partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} \ldots \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} f$

Formules de Taylor-Young pour des fonctions de plusieurs variables

- Pendants des formules analogues vues pour les fonctions réelles
- Elles peuvent être avec point intermédiaire, avec o, avec reste intégral

Formule avec point intermédiaire dans $\mathbb{R}$

Si $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est k fois dérivable, il existe $\xi \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{1}{0!}g(0) + \frac{1}{1!}g'(0) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}g^{(k-1)}(0) + \frac{1}{k!}g^{(k)}(\xi) \\ &= \sum_{j \leq k-1} \frac{1}{j!}g^{(j)}(0) + \frac{1}{k!}g^{(k)}(\xi) \end{aligned}$$

Exercice $*$

Si $f : U \to F$ est k fois différentiable et $[x;y] \subset U$, alors
$t \mapsto g(t) := f((1-t)x + ty)$ est k fois dérivable et

$$g^{(j)}(t) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!}(\partial^\alpha f)((1-t)x+ty)(y-x)^\alpha, \ \forall\, t \in [0,1], \forall\, 0 \leq j \leq k$$

Formule de Taylor-Young avec point intermédiaire

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est k fois différentiable et $[x;y] \subset U$, alors il existe $z \in]x;y[$ tel que

$$f(y) = \sum_{|\alpha|\leq k-1} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)(y-x)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(z)(y-x)^\alpha$$

Cas particuliers

- Si f est différentiable, il existe $z \in]x;y[$ tel que $f(y) = f(x) + [\nabla f(z)] \cdot (y-x)$ (on retrouve le TAF)
- Si f est deux fois différentiable, il existe $z \in]x;y[$ tel que

$$f(y) = f(x) + [\nabla f(x)] \cdot (y-x) + \frac{1}{2}[(H_z f)(y-x)] \cdot (y-x)$$

où $H_a f := (\partial_i \partial_j f(a))_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n}$ est la « matrice hessienne » de f (évaluée en a)

Définition ($o(\|h\|^c)$)

Si $f : V \setminus \{0\} \to G$, avec F, G normés, $V \subset F$ ouvert et $0 \in F$, et $c \in \mathbb{R}$,
$f(h) = o(\|h\|^c)$ si $\lim_{h \to 0} \frac{\|f(h)\|_G}{\|h\|_F^c} = 0$
En particulier, $f(h) = o(h)$ si et seulement si $f(h) = o(\|h\|)$

Formule de Taylor-Young avec o

Si $f : U \to \mathbb{R}$, $f \in C^k$, alors

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + o(\|h\|^k), \ \forall x \in U$$

Un résultat plus général (niveau L3)

La formule ci-dessus reste vraie pour $f : U \to F$, f k fois différentiable

Formule avec reste intégral

Si $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g\in C^k$, alors

$$g(1)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}g^{(j)}(0)+\frac{1}{(k-1)!}\int_0^1(1-t)^{k-1}g^{(k)}(t)\,dt$$

Exercice $*$

Si $f\in C^k$, alors $t\mapsto f((1-t)x+ty)\in C^k$

Formule de Taylor-Young avec reste intégral

Si $f\in C^k$ et $[x;y]\subset U$, alors

$$f(y)=\sum_{|\alpha|\le k-1}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)(y-x)^\alpha$$
$$+k\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^{k-1}\partial^\alpha f((1-t)x+ty)\,dt(y-x)^\alpha$$

Un résultat plus général (niveau M1)

La formule ci-dessus reste vraie pour $f : U \to F$, $f \in C^k$

Exercice $**$

- Écrire la formule ci-dessus si $k = 2$, en fonction de ∇f et Hf
- Écrire les trois formules de Taylor-Young si $n = 2$, $k = 2$ et $f = f(x, y)$, en fonction de $\partial_x f$, $\partial_y f$, $\partial_x \partial_x f$, $\partial_x \partial_y f$, $\partial_y \partial_y f$
  (Changer les noms des points x et y !)

Définition (matrice hessienne)

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est deux fois différentiable, la « matrice hessienne » de f en $a \in U$ est la matrice symétrique

$$H_a f := \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\partial_{x_1} f(a) & \partial_{x_1}\partial_{x_2} f(a) & \dots & \partial_{x_1}\partial_{x_n} f(a) \\ \dots & & & \\ \partial_{x_n}\partial_{x_1} f(a) & \partial_{x_n}\partial_{x_2} f(a) & \dots & \partial_{x_n}\partial_{x_n} f(a) \end{pmatrix} = (\partial_{x_p}\partial_{x_j} f(a))_{p=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n}$$