UE MAT2094L Analyse 4

Chapitre 6. Arcs paramétrés

22 avril 2026

Cadre

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalle
- F normé (typiquement, $F = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$)
- $\varphi : I \to F$
- Un exemple typique : I est un intervalle « temporel », $\varphi(t)$ est la position d'un « point matériel » à l'instant t
- Dans la « vraie vie », φ n'est pas nécessairement différentiable (=dérivable !), mais est au moins continue

Définitions (arc paramétré, courbe support)

- Un arc paramétré différentiable (ou de classe C^k) est une application φ comme ci-dessus, différentiable ou de classe C^k
- La « courbe (géométrique) support » de φ est $\mathscr{C} := \varphi(I)$

Remarques

- $\mathscr{C}$ porte mal son nom : si φ est constante, $\mathscr{C}$ est un singleton, ce qui ne correspond pas à l'intuition d'une courbe
- Quand $F = \mathbb{R}^m$ et $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, la condition sur φ est que chaque φ_j soit différentiable ou de classe C^k
- Les arcs paramétrés « physiques » ne sont pas nécessairement différentiables ; ils sont plutôt C^1 par morceaux

Exemples

- Si $I = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^2$, $\varphi_1(t) = 2t+1$, $\varphi_2(t) = t-1$, $\mathscr{C}$ est la droite de vecteur directeur $(2,1)$ qui passe par $(1,-1)$
- Si $F = \mathbb{R}^2$, $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = f(t)$, avec $f : I \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}$ est le graphe de f
- Si $I = [0, 2\pi]$, $F = \mathbb{R}^2$, $\varphi(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathscr{C}$ est le cercle unité du plan
- Si $I = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $\mathscr{C}$ est une « hélice » qui tourne autour de l'axe Oz

Cadre simplifié

Nous supposons φ injective : chaque point $x_0 \in \mathscr{C}$ est de la forme $x_0 = \varphi(t_0)$ pour exactement un $t_0 \in I$

Définitions (point régulier, point singulier, droite tangente)

- x_0 est un point « régulier » si $\varphi'(t_0) \neq 0$, « singulier » si $\varphi'(t_0) = 0$
- Si x_0 est un point régulier de $\mathscr{C}$, la tangente à $\mathscr{C}$ au point x_0 est la droite qui passe par x_0, de directeur $\varphi'(t_0)$ (càd $\{x_0 + s\varphi'(t_0)\,;\, s \in \mathbb{R}\}$)

Interprétations géométriques

La tangente est la droite qui « approche le mieux » $\mathscr{C}$ au voisinage de x_0. Son directeur $\varphi'(t_0)$ indique le sens du parcours sur $\mathscr{C}$

Exemple

Si $\varphi(t) = (t, f(t))$, avec f dérivable : tous les points de $\mathscr{C}$ sont réguliers, et la tangente définie ci-dessus est la tangente en $(t_0, f(t_0))$ au graphe de f

Définition (reparamétrisation)

Une reparamétrisation est $\psi : J \to I$, avec $J \subset I$ intervalle et ψ difféomorphisme (ψ bijective, ψ et ψ^{-1} dérivables, ou C^k)

Remarque

Avec ψ comme ci-dessus, $\varphi \circ \psi : J \to F$ est un arc paramétré dont la courbe support est celle de φ. De plus, $\psi \circ \varphi$ est injective si φ l'est

Philosophie générale

Une notion « géométrique » liée à $\mathscr{C}$ ne doit pas dépendre du choix de la paramétrisation (« invariance par reparamétrisation »)

Cadre simplifié

Nous supposons φ injective : chaque point $x_0 \in \mathscr{C}$ est de la forme $x_0 = \varphi(t_0)$ pour exactement un $t_0 \in I$

Proposition (invariance de la tangente)

En un point régulier, la tangente est invariante par reparamétrisation

Définitions (vitesse, abscisse curviligne)

- La vitesse (instantanée) à l'instant t est $\|\varphi'(t)\|$
- On fixe (arbitrairement) une « origine » ou « point initial » $x_0 = \varphi(t_0) \in \mathscr{C}$. Si $\varphi \in C^1$, l'« abscisse curviligne » en $x = \varphi(t)$ est $\ell(x) := \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\varphi'(s)\|\, ds$

Interprétation géométrique

L'abscisse curviligne est la distance sur la courbe $\mathscr{C}$ entre x_0 et x, avec le signe + si on va dans le futur $(t > t_0)$ et le signe - si on va dans le passé $(t < t_0)$. Par abus de langage, l'abscisse curviligne est désignée comme la « longueur de l'arc »... Cette longueur peut être négative !

Proposition (changement d'origine et invariance de l'abscisse curviligne)

- Si l'origine est x_1, l'abscisse curviligne devient $\mathscr{C} \ni x \mapsto \ell(x) - \ell(x_1)$
- L'abscisse curviligne est invariante par reparamétrisation croissante. Elle change de signe pas reparamétrisation décroissante

Proposition (reparamétrisation par l'abscisse curviligne)

Si φ est C^1, injective, et tous les points de $\mathscr{C}$ sont réguliers, alors :

- ℓ est injective
- $\psi : \ell(\mathscr{C}) \to I$, $\psi(\ell(x(t))) := t$ est une reparamétrisation
- pour $\varphi \circ \psi$, la vitesse instantanée est de longueur 1 en tout point : $\left\|(\varphi \circ \psi)'(s)\right\| = 1$, $\forall s \in \ell(\mathscr{C})$

Interprétation géométrique

Si une paramétrisation φ est C^1, injective, et tous les points de $\mathscr{C}$ sont réguliers, alors on peut parcourir $\mathscr{C}$ à vitesse constante 1

Définition (dérivation le long d'un arc)

Si $\varphi : I \to V \subset \mathbb{R}^m$ et $f : V \to \mathbb{R}$ est différentiable, la « dérivée de f le long de φ » est la fonction $I \ni t \mapsto (f \circ \varphi)'(t)$

Interprétation physique

La dérivée mesure la vitesse de changement de f sur $\mathscr{C}$ en fonction de la vitesse de parcours de $\mathscr{C}$: $[f(x) = \varepsilon x, \varphi(t) = t/\varepsilon^2] \Rightarrow (f \circ \varphi)'(t) = 1/\varepsilon \gg 1$

Définition (repère de Frenet d'un courbe plane)

Si $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ est injective et $x_0 = \varphi(t_0)$ est régulier, le « repère de Frenet » en x_0 est le repère orthonormé direct (T, N), où $T := \varphi'(t_0)/\|\varphi'(t_0)\|$

Interprétation géométrique

$T = T(x_0)$ est tangent à $\mathscr{C}$ en x_0 et indique le sens du parcours de $\mathscr{C}$

Proposition (invariance du repère de Frenet)

Le repère de Frenet est invariant par reparamétrisation croissante