Proposition 2.13 (**Image réciproque d'un ouvert/fermé par une application continue**). *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application continue, alors si $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ est un ouvert (resp. F est un fermé), $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Montrons-le pour F fermé. Alors on a

$$f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in F\}.$$

Soit $(x_k)_k \subset f^{-1}(F)$ qui tend vers x. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f(x_k) \in F$. Comme f est continue, $f(x_k) \to f(x)$ et comme F est fermé, la suite $(f(x_k))_k$, qui ici converge, a sa limite dans F. On en déduit que $f(x) \in F$ et donc que $x \in f^{-1}(F)$ et ainsi finalement que $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors comme

$$\mathbb{R}^n \backslash f^{-1}(\Omega) = f^{-1}(\mathbb{R}^p \backslash \Omega),$$

le fait que $\mathbb{R}^p \backslash \Omega$ soit fermé comme complémentaire d'un ouvert prouve que $\mathbb{R}^n \backslash f^{-1}(\Omega)$ est un fermé d'après le point précédent, et donc que $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $\square$

2.2 Points intérieurs/adhérents

Définition 2.14 (Voisinage). *On dit que $V \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$.*

Exemples 2.15. $[0,2]$, $]-3,3[$ et $]1/2,3/2]$ sont des voisinages de $x = 1$ car, par exemple, ils contiennent tous les trois l'intervalle ouvert $]3/4,5/4[$ qui contient lui-même $x = 1$.

Définition 2.16 (Point intérieur à une partie de $\mathbb{R}^n$). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On dit que le point x est intérieur à A si A est un voisinage de x, c'est-à-dire si $\exists r > 0$, $B(x,r) \subset A$.*
L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A.

Remarque 2.17. Un point y est dit extérieur à A s'il est intérieur à son complémentaire. L'extérieur de A est donc $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}^n \setminus A}} \neq \mathbb{R}^n \setminus \mathring{A}$ (pensez à A comme étant une boule ouverte).

Exemple 2.18. Le point 1 est intérieur à $]0,2[$ et à $[0,3]$.

Proposition 2.19 (Ouvert et intérieur). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\mathring{A} = A$.*

Démonstration. Evident par définition (cf. aussi TD). □

Définition 2.20 (Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}^n$). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Un point x est adhérent à A si chaque voisinage de x rencontre A, c'est-à-dire que pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \emptyset$.*
L'ensemble des points adhérents à A, aussi appelé adhérence de A, est noté $\overline{A}$.

Proposition 2.21 (Propriétés de l'adhérence d'un ensemble). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors $x \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $(x_k)_k \subset A$ telle que $\lim_{k \to +\infty} x_k = x$.*

Démonstration. (Preuve expliquée brièvement en CM, car le résultat est évident si on a bien compris la définition de point adhérent). Supposons que $(x_k)_k \subset A$ converge vers x et montrons que x est adhérent à A. Soit V un voisinage de x. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$. Or, par convergence de $(x_k)_k$ vers x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $x_k \in B(x,r)$ et ainsi $V \cap A \neq \emptyset$, ce qui veut dire que x est un point adhérent à A.
Supposons maintenant que x est adhérent à A. Alors pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \emptyset$, ce qui est vrai en particulier pour $V = B(x,r)$ pour tout $r > 0$. Soit $(\varepsilon_k)_k \subset \mathbb{R}_+^*$ une suite qui tend vers 0. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists x_k \in B(x,\varepsilon_k) \cap A \neq \emptyset$. On a donc construit une suite $(x_k)_k \subset A$ qui converge vers x puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|x - x_k\|_2 < \varepsilon_k \to 0$. □

Exemple 2.22. Dans $\mathbb{R}^2$, le point $(0,0)$ est adhérent à $A =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
En effet, on peut construire la suite $(x_k)_k \subset A$ définie pour tout $k \geq 1$ par $x_k = (1/k, 1/k)$ qui tend vers $(0,0)$ quand $k \to +\infty$.

Proposition 2.23 (Fermé et adhérence). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors A est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Démonstration. Evident par définition (cf. aussi TD). □

Définition 2.24 (Densité). *Soient $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, alors on dit que A est dense dans B si $B = \overline{A}$.*

Exemple 2.25. On sait que $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'ensemble des rationnels et l'ensemble des irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$. Tout réel est donc limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

Pour $A \subset \mathbb{R}^n$, définissons la distance de $x \in \mathbb{R}^n$ à A :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|_2.$$

Alors on a le résultat suivant.

Proposition 2.26 (Adhérence et distance). *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^n$, alors $x \in \overline{A}$ si et seulement si $d(x, A) = 0$.*

Démonstration. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\iff \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A,\ \lim_{k\to+\infty} x_k = x \\ &\iff \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A,\ \lim_{k\to+\infty} \|x - x_k\|_2 = 0 \\ &\iff \inf_{a\in A} \|x - a\|_2 = 0 \\ &\iff d(x, A) = 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.27 (Adhérence et intérieur de $B(x,r)$). *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, alors :*

1. $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$ *(l'adhérence d'une boule est la boule fermée) ;*
2. $\overset{\circ}{\overbrace{\overline{B}(x,r)}} = B(x,r)$ *(l'intérieur d'une boule est la boule ouverte).*

Démonstration. Admise (vous pouvez essayer de le démontrer). □

Définition 2.28 (Bord/frontière d'un ensemble). *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, alors on définit par $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$ le bord (ou la frontière) de A.*
En particulier, $\overline{A} = \mathring{A} \sqcup \partial A$ et le triplet $\left(\mathring{A}, \partial A, \mathbb{R}^n \backslash \overline{A}\right)$ forme une partition de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.29. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall r > 0$, $\partial B(x,r) = S(x,r)$ puisque $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$ et $\overset{\circ}{\overbrace{\overline{B}(x,r)}} = B(x,r)$.

2.3 Compacts de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.30 (Compact de $\mathbb{R}^n$). *On dit que l'ensemble non-vide $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si toute suite d'éléments de K admet une sous-suite convergente dans K.*

Remarque 2.31. Une autre définition équivalente sera donnée en L3 en termes de recouvrement de K par des ouverts.

Théorème 2.32 (Heine-Borel). *Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si K est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 2.33. Attention : Ce résultat n'est valable qu'en dimension finie !

Démonstration. Supposons que K est fermé et borné. Montrons que K est compact. Soit $(x_k)_k$ une suite d'éléments de K. Comme K est borné, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(x_k)_k$ admet une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_k$ qui converge vers x. Comme K est fermé, il est clair que $x \in K$, et donc K est compact.
Réciproquement, supposons que K est compact et montrons que K est fermé et borné. Raisonnons par l'absurde.
• Si K n'est pas fermé, Alors K^c n'est pas ouvert et ainsi, en posant une suite $(\varepsilon_k)_k \subset \mathbb{R}_+^*$ tendant vers 0, on a que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver $x_k \in B(x, \varepsilon_k) \cap K \neq \emptyset$. La suite $(x_k)_k \subset K$ ainsi construite tend vers $x \notin K$, car $\|x - x_k\|_2 < \varepsilon_k \to 0$, ainsi que toute ses sous-suites, ce qui est impossible car K et compact. Ainsi K est fermé.
• Si K n'est pas borné, alors il existe une suite $(x_k)_k \subset K$ telle que $\|x_k\|_2 \geq k$ pour tout k. Ainsi toute sous-suite de $(x_k)_k$ serait aussi non-bornée et donc divergente, ce qui est une contradiction avec le fait que K est compact. □

Exemple 2.34 (Boules fermées). Toute boule fermée $\overline{B}(x, r)$ est compacte dans $\mathbb{R}^n$.
Pour aller plus loin : Le Théorème de Riesz nous apprend que les boules fermées sont compactes si et seulement l'espace que l'on considère est de dimension finie. En dimension infinie, la notion de compacité existe mais les boules fermées ne sont pas compactes! On pourra se référer à cette page pour en savoir plus.

Proposition 2.35 (Intersection et union de compacts). *Tout intersection quelconque (resp. union finie) de compacts de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Soit $\{K_i\}_{i \in I}$ une famille quelconque de compacts de $\mathbb{R}^n$, ce sont donc des fermés-bornés d'après le théorème de Heine-Borel. L'ensemble $K = \bigcap_{i \in I} K_i$ est donc :

- fermé comme intersection quelconque de fermés.
- borné car, étant donné $i \in I$, $K \subset K_i$ et comme K_i est borné, K l'est aussi.

De plus, si $\{K_1, \ldots, K_p\}$ est une famille finie de compacts, alors l'ensemble $K' = \bigcup_{i=1}^{p} K_i$ est :

- fermé comme union finie de fermés.
- borné. En effet, pour tout $i \in I = \{1, \ldots, p\}$, K_i est borné donc il existe $M_i > 0$ tel que pour tout $x \in K_i$, $\|x\|_2 \leq M_i$. Comme I est un ensemble fini, $M := \max_{i \in I} M_i > 0$ existe. Ainsi, soit $x \in K'$, alors il existe $i \in I$ tel que $x \in K_i$ et donc $\|x\| \leq M_i \leq M$, ce qui prouve que K' est borné.

□

Proposition 2.36 (Produit de compacts). *Soit $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $K_2 \subset \mathbb{R}^p$ deux compacts. Alors $K_1 \times K_2$ est un compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.*

Démonstration. $K_1 \times K_2$ est un fermé comme produit de fermés. De plus, il est clair que c'est aussi une partie bornée de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Il s'agit donc d'un compact. □

Exemple 2.37. Le cube $K = [0, 1]^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.