

# 1 Appréhender les distances : les normes sur $\mathbb{R}^n$

On rappelle que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'espace  $\mathbb{R}^n$  est défini par

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_k \in \mathbb{R} \text{ pour tout } 1 \leq k \leq n\}.$$

Il forme un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire définies respectivement par

1. addition :  $x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ ,
2. multiplication par un scalaire : si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda x = \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ .

**Définition 1.1 (Norme sur  $\mathbb{R}^n$ ).** Une norme sur  $\mathbb{R}^n$  est une application

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. Positivité : Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\| \geq 0$ ;
2. Séparation : Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ;
3. Homogénéité : Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda x = |\lambda| \|x\|$ ;
4. Inégalité triangulaire : Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

On dit alors que  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé.

**Exemple 1.2 (Valeur absolue).** Dans  $\mathbb{R}$ , la valeur absolue  $|\cdot|$  est une norme.



**Exercice.** Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathbb{R}$  si et seulement s'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\|\cdot\| = \alpha |\cdot|$ .

**Correction.** Soit  $\alpha > 0$ , alors il est facile de montrer que  $x \mapsto \alpha|x|$  est bien une norme sur  $\mathbb{R}$ . Réciproquement, soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}$ , alors on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\|x\| = \|1 \times x\| = |x| \|1\|$  par homogénéité. En posant  $\alpha = \|1\| > 0$  (puisque  $1 \neq 0$ ), on a bien  $\|\cdot\| = \alpha |\cdot|$ .



**Remarque 1.3 (Maximum des normes).** Soient  $\|\cdot\|'$  et  $\|\cdot\|''$  deux normes sur  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| := \max(\|x\|', \|x\|'')$$

est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.4 (Distance sur  $\mathbb{R}^n$  issue d'une norme).** Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ , alors la distance sur  $\mathbb{R}^n$  associée à cette norme est l'application  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

**Remarque 1.5.** La notion générale de distance  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est basée sur celle de la norme dans le sens où elle doit vérifier :

1. Positivité :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $d(x, y) \geq 0$ ;
2. Symétrie :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $d(x, y) = d(y, x)$ ;

3. Séparation :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d(x, y) = 0 \iff x = y;$
4. Inégalité triangulaire :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Etant donnée cette définition, une distance peut ne pas être issue d'une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

A partir de l'inégalité triangulaire, on peut montrer le résultat suivant.



**Proposition 1.6 (Deuxième inégalité triangulaire).** Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

*Démonstration.* Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , alors on remarque que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \\ \|y\| &= \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire dans chaque cas et la symétrie  $\|u\| = \|-u\|$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$  (homogénéité pour  $\lambda = -1$ ) dans le deuxième cas. Ainsi on a montré que

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, \quad \text{et} \quad \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|,$$

ce qui revient à dire que  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ . □

**Remarque 1.7.** Généralement, on synthétise les deux inégalités triangulaires de la façon suivante :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

**Proposition 1.8 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).** Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et tout  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

De plus, on a égalité si et seulement si  $x = \lambda y$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire que les vecteurs  $x$  et  $y$  sont liés.

*Démonstration.* (Preuve vue en TD) □

**Remarque 1.9 (Produit scalaire).** Une autre façon d'écrire cette inégalité est la suivante : l'espace  $\mathbb{R}^n$  peut être muni de la norme euclidienne (cf. proposition suivante)  $\|x\|_2 := \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  et du produit scalaire associé  $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$ . On remarque que  $\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$ . Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

**Remarque 1.10 (Pour aller plus loin : Inégalité de Hölder).** L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier d'une inégalité plus générale appelée inégalité de Hölder : pour tous réels  $p$  et  $q$  tels que  $1 \leq p, q \leq +\infty$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors, pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a (la première inégalité est évident, c'est la seconde qui est celle de Hölder)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Proposition 1.11 (Normes classiques).** Les applications  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  par

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 := \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

sont des normes sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque 1.12 (Pour aller plus loin : p-normes).** On peut montrer que, pour tout réel  $p \geq 1$ , la  $p$ -norme  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ . L'unique difficulté réside à montrer l'inégalité triangulaire, appelée inégalité de Minkowski.

*Démonstration.* Vérifions un-à-un les axiomes d'une norme dans chacun des cas.

**Norme  $\|\cdot\|_1$ .** Il s'agit d'une simple conséquence du fait que la valeur absolue  $|\cdot|$  est une norme sur  $\mathbb{R}$ . En effet, on a :

1. **Positivité.** Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , alors  $|x_k| \geq 0$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , ce qui implique que  $\|x\|_1 \geq 0$ .
2. **Séparation.** Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Si  $x = 0$ , alors il est clair que  $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |0| = 0$ . Réciproquement, si  $\|x\|_1 = 0$ , alors on a  $\sum_{k=1}^n |x_k| = 0$ . Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, ce qui implique que  $|x_k| = 0$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ . On en déduit donc que  $x_k = 0$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , c'est-à-dire que  $x = 0$ .
3. **Homogénéité.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , alors, en utilisant l'homogénéité de la valeur absolue,

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\lambda x_k| = \sum_{k=1}^n |\lambda| |x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |x_k| = |\lambda| \|x\|_1.$$

4. **Inégalité triangulaire.** Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , alors

$$\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

**Norme  $\|\cdot\|_\infty$ .** On a

1. **Positivité.** Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |x_j|$  pour un certain  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Alors il est clair que  $\|x\|_\infty = |x_j| \geq 0$ .
2. **Séparation.** Si  $x = 0$ , alors il est clair que  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 0$ . Réciproquement, soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 0$ . Alors cela implique que  $|x_k| = 0$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$  et donc que  $x = 0$ .
3. **Homogénéité.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Alors, on a

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda x_k| = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda| |x_k| = |\lambda| \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |\lambda| \|x\|_\infty.$$

4. **Inégalité triangulaire.** Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , alors, pour un certain  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k + y_k| = |x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

**Norme  $\|\cdot\|_2$ .** On a

1. **Positivité.** Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , il est clair que  $\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$ .
2. **Séparation.** Si  $x = 0$ , alors on a  $\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^n 0^2)^{\frac{1}{2}} = 0$ . Réciproquement, soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} = 0$ . Alors on a nécessairement  $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$  et toute somme nulle de termes positifs est composée de termes nuls, c'est-à-dire que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_k^2 = 0$ , i.e.  $x_k = 0$ , et ainsi  $x = 0$ .
3. **Homogénéité.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Alors on a

$$\|\lambda x\|_2 = \left( \sum_{k=1}^n (\lambda x_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{k=1}^n \lambda^2 x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \lambda^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda^2} \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|x\|_2.$$

4. **Inégalité triangulaire.** Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , alors

$$\|x + y\|_2^2 = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2 + 2x_k y_k) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n y_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que  $2 \sum_{k=1}^n x_k y_k \leq 2 \|x\|_2 \|y\|_2$  et ainsi

$$\|x + y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2 \|x\|_2 \|y\|_2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2.$$

En prenant la racine carrée de l'expression précédente, on trouve  $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ .

□

 **Exercice.** Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $N_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad N_\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i|.$$

Montrer que  $N_\alpha$  est une norme si et seulement si  $\alpha \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ .

**Correction.** Supposons que  $\alpha \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ . Il est alors facile de montrer, avec les mêmes arguments

que pour la norme  $\|\cdot\|_1$ , que  $N_\alpha$  est une norme.

Réiproquement, si  $N_\alpha$  est une norme, alors, en notant  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , alors, puisque  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $e_i \neq (0, \dots, 0)$ , on obtient

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad N(e_i) = \alpha_i > 0$$

et donc  $\alpha \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ .

**Définition 1.13 (Normes équivalentes).** Soient  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  deux normes sur  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  sont équivalentes s'il existe  $m, M > 0$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|.$$

 **Remarque 1.14.** Il s'agit bien d'une relation d'équivalence : binaire, réflexive, symétrique et transitive ([Exercice](#)).

**Théorème 1.15 (Équivalence des normes sur  $\mathbb{R}^n$ ).** Toutes les normes sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes.

*Démonstration.* Cf. chapitre sur la continuité (on a besoin de la compacité et de la continuité pour prouver ce résultat).  $\square$

**Définition 1.16 (Boules pour une norme donnée).** Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $d$  sa distance associée,  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ . Alors on définit :

- la boule ouverte centrée en  $x$  et de rayon  $r$  pour la norme  $\|\cdot\|$  par

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$$

- la boule fermée centrée en  $x$  et de rayon  $r$  pour la norme  $\|\cdot\|$  par

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq r\}$$

- la sphère centrée en  $x$  et de rayon  $r$  pour la norme  $\|\cdot\|$  par

$$\partial B(x, r) = S(x, r) := \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = r\}$$

**Remarque 1.17 (Notations).** Si plusieurs normes sont définies, il peut y avoir confusion et on pourra noter  $B_{\|\cdot\|}(x, r)$ ,  $\overline{B}_{\|\cdot\|}(x, r)$  et  $\partial B_{\|\cdot\|}(x, r)$ .

**Exemple 1.18 (Sur  $\mathbb{R}$ ).** En dimension  $n = 1$  pour la valeur absolue,  $B(x, r) = ]x - r, x + r[$ ,  $\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$  et  $S(x, r) = \{x - r, x + r\}$  et  $]a, b[ = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ .

**Exemple 1.19 (Sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ ).** Donnons trois exemples de boules ouvertes :

$$\begin{aligned} B_{\|\cdot\|_2}((1, -3, 0), 2) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 < 4\} \\ B_{\|\cdot\|_1}((2, -1), 1) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + |y + 1| < 1\} \\ B_{\|\cdot\|_\infty}((0, -5), 3) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y + 5|) < 9\}. \end{aligned}$$

**Exemple 1.20 (Représentation des boules dans le plan).** En dimension  $n = 2$ , représentons les boules unités ( $x = 0$  et  $r = 1$ ) fermées pour les normes classiques, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, 1) &= \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\|_1 \leq 1\} = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : |y_1| + |y_2| \leq 1\} \\ \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0, 1) &= \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\|_2 \leq 1\} = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \leq 1\} \\ \overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0, 1) &= \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\|_\infty \leq 1\} = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \max(|y_1|, |y_2|) \leq 1\}.\end{aligned}$$

Il suffit de tracer leurs bords sur le cadran  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  et de compléter par symétrie.

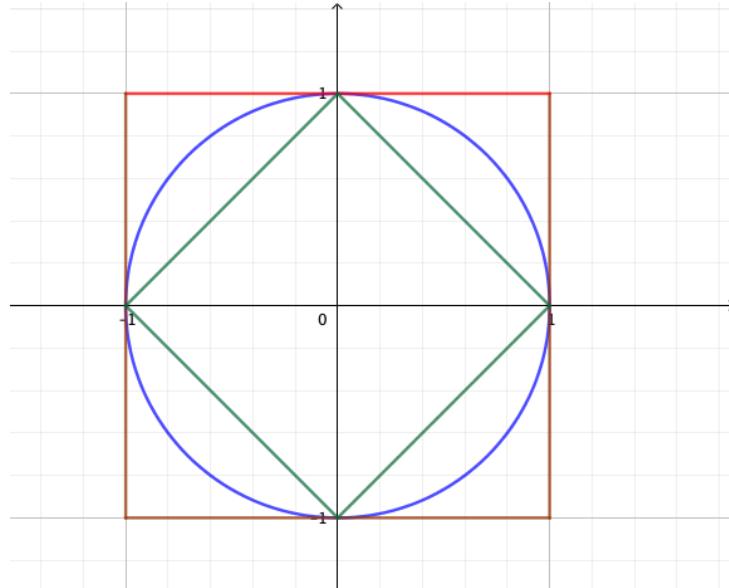


FIGURE 1 : Vert :  $\partial\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, 1)$ ; Bleu :  $\partial\overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0, 1)$ ; Rouge :  $\partial\overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0, 1)$ .

**Définition 1.21 (Ensemble borné).** Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $A \subset \mathbb{R}^n$  est borné (pour la norme  $\|\cdot\|$ ) s'il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in A$ ,  $\|x\| \leq M$ . Autrement dit,  $A$  est borné s'il existe  $M > 0$  tel que  $A \subset B_{\|\cdot\|}(0, M)$ .

**Remarque 1.22 (Normes équivalentes et ensemble borné).** Dans la pratique, on choisira la norme qui nous arrange puisque toutes les normes sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes. En particulier, montrer que, pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $M_i > 0$  tel que  $|x_i| \leq M_i$  suffit pour conclure que  $A$  est borné dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.23 (Convergence d'une suite pour une norme donnée).** Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ . On dit que la suite  $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$  tend vers  $x \in \mathbb{R}^n$  pour la norme  $\|\cdot\|$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad \|x_k - x\| < \varepsilon.$$

On écrit aussi :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$  pour la norme  $\|\cdot\|$ .

**Remarque 1.24.** Quelques remarques sur cette notion de convergence :

- Attention : une suite pourrait converger pour une certaine norme et pas pour une autre! Sur  $\mathbb{R}^n$ , ce ne sera pas le cas, et cela grâce à l'équivalence des normes.

- On peut réécrire cette définition en utilisant la notion de boule ouverte associée à la norme  $\|\cdot\|$  de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad x_k \in B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon).$$

On peut aussi dire : “*quelque soit le voisinage (cf. chapitre suivant, mais une boule ouverte suffit) de  $x$  – aussi petit que l’on veut au sens de l’inclusion –, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans ce voisinage.*”



**Proposition 1.25 (Convergence des coordonnées d’une suite).** *La suite  $(x_k)_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)_k \subset \mathbb{R}^n$  converge vers  $x = (x^1, \dots, x^n)$  pour  $\|\cdot\|_2$  si et seulement si  $(x_k^i)_k$  converge vers  $x^i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  pour  $|\cdot|$ .*

**Remarque 1.26.** On peut choisir n’importe quelle autre norme que  $\|\cdot\|_2$  dans la proposition précédente, car toutes les normes sont équivalentes.