

1 Appréhender les distances : les normes sur \mathbb{R}^n

On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace \mathbb{R}^n est défini par

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_k \in \mathbb{R} \text{ pour tout } 1 \leq k \leq n\}.$$

Il forme un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire définies respectivement par

1. addition : $x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$,
2. multiplication par un scalaire : si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda x = \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Définition 1.1 (Norme sur \mathbb{R}^n). Une norme sur \mathbb{R}^n est une application

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. Positivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq 0$;
2. Séparation : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
3. Homogénéité : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
4. Inégalité triangulaire : Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On dit alors que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 1.2 (Valeur absolue). Dans \mathbb{R} , la valeur absolue $|\cdot|$ est une norme.



Exercice. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R} si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\| = \alpha|\cdot|$.

Correction. Soit $\alpha > 0$, alors il est facile de montrer que $x \mapsto \alpha|x|$ est bien une norme sur \mathbb{R} . Réciproquement, soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R} , alors on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|x\| = \|1 \times x\| = |x| \|1\|$ par homogénéité. En posant $\alpha = \|1\| > 0$ (puisque $1 \neq 0$), on a bien $\|\cdot\| = \alpha|\cdot|$.



Remarque 1.3 (Maximum des normes). Soient $\|\cdot\|'$ et $\|\cdot\|''$ deux normes sur \mathbb{R}^n , alors $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| := \max(\|x\|', \|x\|'')$$

est une norme sur \mathbb{R}^n .

Définition 1.4 (Distance sur \mathbb{R}^n issue d'une norme). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n , alors la distance sur \mathbb{R}^n associée à cette norme est l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Remarque 1.5. La notion générale de distance $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est basée sur celle de la norme dans le sens où elle doit vérifier :

1. Positivité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d(x, y) \geq 0$;
2. Symétrie : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = d(y, x)$;

3. Séparation : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d(x, y) = 0 \iff x = y$;

4. Inégalité triangulaire : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Etant donnée cette définition, une distance peut ne pas être issue d'une norme sur \mathbb{R}^n .

A partir de l'inégalité triangulaire, on peut montrer le résultat suivant.



Proposition 1.6 (Deuxième inégalité triangulaire). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n . Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Démonstration. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors on remarque que

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|,$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire dans chaque cas et la symétrie $\|u\| = \|-u\|$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ (homogénéité pour $\lambda = -1$) dans le deuxième cas. Ainsi on a montré que

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, \quad \text{et} \quad \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|,$$

ce qui revient à dire que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. □

Remarque 1.7. Généralement, on synthétise les deux inégalités triangulaires de la façon suivante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Proposition 1.8 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

De plus, on a égalité si et seulement si $x = \lambda y$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que les vecteurs x et y sont liés.

Démonstration. (Preuve vue en TD) □

Remarque 1.9 (Produit scalaire). Une autre façon d'écrire cette inégalité est la suivante : l'espace \mathbb{R}^n peut être muni de la norme euclidienne (cf. proposition suivante) $\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ et du produit scalaire associé $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$. On remarque que $\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$. Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Remarque 1.10 (Pour aller plus loin : Inégalité de Hölder). L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier d'une inégalité plus générale appelée inégalité de Hölder : pour tous réels p et q tels que $1 \leq p, q \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a (la première inégalité est évident, c'est la seconde qui est celle de Hölder)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proposition 1.11 (Normes classiques). Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

sont des normes sur \mathbb{R}^n .

Remarque 1.12 (Pour aller plus loin : p-normes). On peut montrer que, pour tout réel $p \geq 1$, la p -norme $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur \mathbb{R}^n . L'unique difficulté réside à montrer l'inégalité triangulaire, appelée inégalité de Minkowski.

Démonstration. Vérifions un-à-un les axiomes d'une norme dans chacun des cas.

Norme $\|\cdot\|_1$. Il s'agit d'une simple conséquence du fait que la valeur absolue $|\cdot|$ est une norme sur \mathbb{R} . En effet, on a :

1. Positivité. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $|x_k| \geq 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, ce qui implique que $\|x\|_1 \geq 0$.
2. Séparation. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si $x = 0$, alors il est clair que $\|x\| = \sum_{k=1}^n |0| = 0$. Réciproquement, si $\|x\|_1 = 0$, alors on a $\sum_{k=1}^n |x_k| = 0$. Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, ce qui implique que $|x_k| = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. On en déduit donc que $x_k = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire que $x = 0$.
3. Homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, alors, en utilisant l'homogénéité de la valeur absolue,

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\lambda x_k| = \sum_{k=1}^n |\lambda| |x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |x_k| = |\lambda| \|x\|_1.$$

4. Inégalité triangulaire. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors

$$\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Norme $\|\cdot\|_\infty$. On a

1. Positivité. Soit $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |x_j|$ pour un certain $j \in \{1, \dots, n\}$. Alors il est clair que $\|x\|_\infty = |x_j| \geq 0$.
2. Séparation. Si $x = 0$, alors il est clair que $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 0$.
Réciproquement, soit $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 0$. Alors cela implique que $|x_k| = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et donc que $x = 0$.
3. Homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^n$. Alors, on a

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda x_k| = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda| |x_k| = |\lambda| \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |\lambda| \|x\|_\infty.$$

4. Inégalité triangulaire. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors, pour un certain $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k + y_k| = |x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Norme $\|\cdot\|_2$. On a

1. Positivité. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il est clair que $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$.
2. Séparation. Si $x = 0$, alors on a $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n 0^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$.
Réciproquement, soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$. Alors on a nécessairement $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$ et toute somme nulle de termes positifs est composée de termes nuls, c'est-à-dire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k^2 = 0$, i.e. $x_k = 0$, et ainsi $x = 0$.
3. Homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors on a

$$\|\lambda x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n (\lambda x_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^n \lambda^2 x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda^2 \sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|x\|_2.$$

4. Inégalité triangulaire. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors

$$\|x + y\|_2^2 = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2 + 2x_k y_k) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n y_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que $2 \sum_{k=1}^n x_k y_k \leq 2 \|x\|_2 \|y\|_2$ et ainsi

$$\|x + y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2 \|x\|_2 \|y\|_2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2.$$

En prenant la racine carrée de l'expression précédente, on trouve $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$.

□



Exercice. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $N_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad N_\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i|.$$

Montrer que N_α est une norme si et seulement si $\alpha \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

Correction. Supposons que $\alpha \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Il est alors facile de montrer, avec les mêmes arguments

que pour la norme $\|\cdot\|_1$, que N_α est une norme.

Réciproquement, si N_α est une norme, alors, en notant $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de \mathbb{R}^n , alors, puisque $\forall i \in \{1, \dots, n\}, e_i \neq (0, \dots, 0)$, on obtient

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad N(e_i) = \alpha_i > 0$$

et donc $\alpha \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

Définition 1.13 (Normes équivalentes). Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur \mathbb{R}^n . On dit que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes s'il existe $m, M > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|.$$



Remarque 1.14. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence : binaire, réflexive, symétrique et transitive ([Exercice](#)).

Théorème 1.15 (Equivalence des normes sur \mathbb{R}^n). Toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes.

Démonstration. Cf. chapitre sur la continuité (on a besoin de la compacité et de la continuité pour prouver ce résultat). \square

Définition 1.16 (Boules pour une norme donnée). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n , d sa distance associée, $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Alors on définit :

- la boule ouverte centrée en x et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$ par

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$$

- la boule fermée centrée en x et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$ par

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq r\}$$

- la sphère centrée en x et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$ par

$$\partial B(x, r) = S(x, r) := \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = r\} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = r\}$$

Remarque 1.17 (Notations). Si plusieurs normes sont définies, il peut y avoir confusion et on pourra noter $B_{\|\cdot\|}(x, r)$, $\overline{B}_{\|\cdot\|}(x, r)$ et $\partial B_{\|\cdot\|}(x, r)$.

Exemple 1.18 (Sur \mathbb{R}). En dimension $n = 1$ pour la valeur absolue, $B(x, r) =]x - r, x + r[$, $\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$ et $S(x, r) = \{x - r, x + r\}$ et $\partial B = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$.

Exemple 1.19 (Sur \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3). Donnons trois exemples de boules ouvertes :

$$B_{\|\cdot\|_2}((1, -3, 0), 2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 < 4\}$$

$$B_{\|\cdot\|_1}((2, -1), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + |y + 1| < 1\}$$

$$B_{\|\cdot\|_\infty}((0, -5), 3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y + 5|) < 3\}.$$

Exemple 1.20 (Représentation des boules dans le plan). En dimension $n = 2$, représentons les boules unités ($x = 0$ et $r = 1$) fermées pour les normes classiques, c'est-à-dire :

$$\overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, 1) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\|_1 \leq 1\} = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : |y_1| + |y_2| \leq 1\}$$

$$\overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0, 1) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\|_2 \leq 1\} = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \leq 1\}$$

$$\overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0, 1) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\|_\infty \leq 1\} = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \max(|y_1|, |y_2|) \leq 1\}.$$

Il suffit de tracer leurs bords sur le cadran $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et de compléter par symétrie.

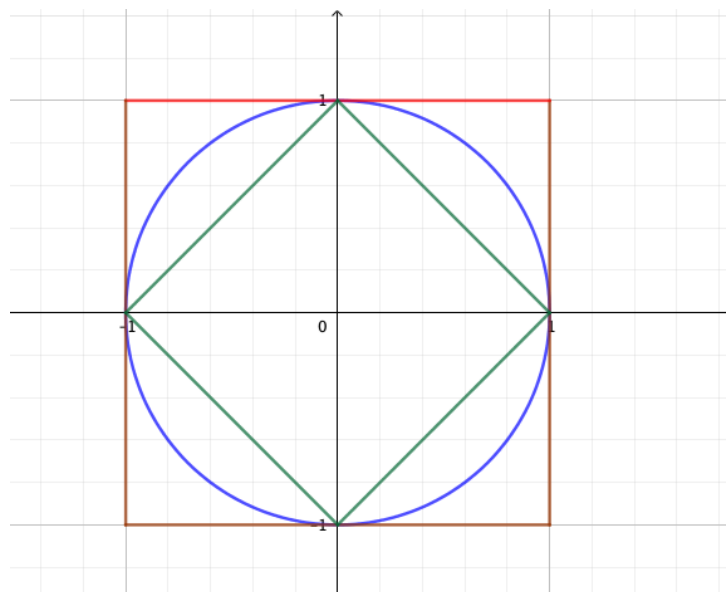


FIGURE 1 : Vert : $\partial \overline{B}_{\|\cdot\|_1}(0, 1)$; Bleu : $\partial \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0, 1)$; Rouge : $\partial \overline{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0, 1)$.

Définition 1.21 (Ensemble borné). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n , on dit que $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné (pour la norme $\|\cdot\|$) s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq M$. Autrement dit, A est borné s'il existe $M > 0$ tel que $A \subset B_{\|\cdot\|}(0, M)$.

Remarque 1.22 (Normes équivalentes et ensemble borné). Dans la pratique, on choisira la norme qui nous arrange puisque toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes. En particulier, montrer que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $M_i > 0$ tel que $|x_i| \leq M_i$ suffit pour conclure que A est borné dans \mathbb{R}^n .

Définition 1.23 (Convergence d'une suite pour une norme donnée). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n . On dit que la suite $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ tend vers $x \in \mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad \|x_k - x\| < \varepsilon.$$

On écrit aussi : $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$ pour la norme $\|\cdot\|$.

Remarque 1.24. Quelques remarques sur cette notion de convergence :

- Attention : une suite pourrait converger pour une certaine norme et pas pour une autre! Sur \mathbb{R}^n , ce ne sera pas le cas, et cela grâce à l'équivalence des normes.

- On peut réécrire cette définition en utilisant la notion de boule ouverte associée à la norme $\|\cdot\|$ de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad x_k \in B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon).$$

On peut aussi dire : “quelque soit le voisinage (cf. chapitre suivant, mais une boule ouverte suffit) de x – aussi petit que l’on veut au sens de l’inclusion –, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans ce voisinage.”



Proposition 1.25 (Convergence des coordonnées d’une suite). La suite $(x_k)_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)_k \subset \mathbb{R}^n$ converge vers $x = (x^1, \dots, x^n)$ pour $\|\cdot\|_2$ si et seulement si $(x_k^i)_k$ converge vers x^i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ pour $|\cdot|$.

Remarque 1.26. On peut choisir n’importe quelle autre norme que $\|\cdot\|_2$ dans la proposition précédente, car toutes les normes sont équivalentes.