

Licence de mathématiques

L2, algèbre 4

examen de rattrapage

mercredi 2 juillet 2025

durée 1H30*Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.***Exercice 1**

Donner la définition d'un espace affine et donner un exemple.

Exercice 2 Soit la matrice réelle $R = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que R est une matrice de rotation. Déterminer son axe et son angle.
- b) Déterminer P une matrice orthogonale telle que : $R = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Exercice 3Soit $E = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ l'espace des polynômes réels de degrés ≤ 2 . On pose

$$\forall P, Q \in E, \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx .$$

- a) Montrer que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien. Quelle est sa dimension ?
- b) Montrer que l'application linéaire

$$E \rightarrow E, P(X) \mapsto P(1 - X)$$

est un endomorphisme autoadjoint pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- c) Soit F le sous-espace de E engendré par les polynômes X, X^2 . Déterminer une base orthonormée de F .
- d) Montrer que le polynôme $P = -\frac{10}{3}X^2 + 4X$ est le projeté orthogonal du polynôme constant 1 sur le sous-espace F , pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- e) Déterminer

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (1 + ax + bx^2)^2 dx.$$

Justifier sa réponse.

Exercice 4

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour tous $A, B \in E$, on note $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$.

- a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
- b) Soit $\mathcal{S} \leq E$ le sous-espace des matrices symétriques réelles. Dans E , déterminer une base de l'orthogonal $\mathcal{S}^\perp$ pour ce produit scalaire.