

Licence de mathématiques

L2, algèbre 4

examen final

mardi 12 mai 2026

**durée 2H***Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.***Exercice 1** On note  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  l'espace des matrices antisymétriques réelles de taille  $n \times n$ .

- Montrer que l'application  $\varphi : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto -\text{Tr}(AB)$  est un produit scalaire.
- Cas où  $n = 3$ . Donner une base de l'espace  $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$  et donner la matrice de  $\varphi$  dans cette base.

**Exercice 2** Soit  $\mathcal{C}$  l'espace des fonctions réelles continues sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .On pose  $\forall f, g \in \mathcal{C}, \langle f, g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} fg$ .

- Justifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{C}$ .
- Soit  $\mathcal{C}_1$  le sous-espace de  $\mathcal{C}$  engendré par les fonctions  $\sin$  et  $\cos$ . Trouver une base orthonormée de  $\mathcal{C}_1$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
- Déterminer le projeté orthogonal de la fonction constante 1 sur  $\mathcal{C}_1$ .
- En déduire  $\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - a \cos t - b \sin t)^2 dt$ .

**Exercice 3** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Justifier que la matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  et déterminer ses valeurs propres.
- Trouver une matrice orthogonale  $P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PD^tP$ .

**Exercice 4** Soit  $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ .

- a) Montrer que  $A$  est une matrice de rotation et déterminer son axe.  
b) Trouver  $\theta \in \mathbb{R}$  tel qu'il existe une matrice orthogonale  $P$  vérifiant :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} {}^t P.$$

(On ne demande pas de calculer  $P$ )

- c) En déduire  $A^6$ .

**Exercice 5** Soient  $A_1 = (1, 1)$ ,  $A_2 = (2, 3)$ ,  $A_3 = (4, 5)$ ,  $B_1 = (3, 4)$ ,  $B_2 = (\frac{5}{2}, 3)$ ,  $B_3 = (\frac{3}{2}, 2) \in \mathbb{R}^2$ .

- a) Déterminer des équations pour les droites affines  $d_i = (A_i B_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .  
b) Montrer que  $d_1, d_2, d_3$  sont concourantes.