

Licence de mathématiques

L2, Algèbre 4

examen final

lundi 5 mai 2025

durée 2H

*Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.***Exercice 1** Soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ trois $\mathbb{R}$ –espaces affines.

- a) Donner la définition d'une transformation affine $T : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$.
- b) Montrer que si $T : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ et $S : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3$ sont des transformations affines, alors l'application $S \circ T : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_3$ est aussi une transformation affine.

Exercice 2 Si $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

- a) Justifier que la matrice $M_{a,b}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- b) Trouver $P \in O_3(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $M_{1,1} = PDP^{-1}$.
- c) Déterminer tous les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la matrice $M_{a,b} \in O_3(\mathbb{R})$.
- d) Déterminer tous les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M_{a,b} \in SO_3(\mathbb{R})$.
- e) Trouver une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$, $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $M_{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}} = PRP^{-1}$

où $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Exercice 3 a) **Questions de cours.** Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $F \leq E$ un sous-espace vectoriel.

- Rappeler la définition du projeté orthogonal p_F de E sur F .
- Soit $y \in E$. Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base orthonormée de F , exprimer $p_F(y)$ en fonction des f_i et des coefficients $\langle y, f_i \rangle$.
- On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Exprimer

$$\inf_{f \in F} \|y - f\|^2$$

avec y et $p_F(y)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathbb{R}[X]_n$ l'espace des polynômes réels de degrés $\leq n$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]_n$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx .$$

- b) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]_n$.
- c) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt avec la famille (X, X^2, X^3) , trouver une base orthonormée de $F = \text{Vect}(X, X^2, X^3)$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- d) En déduire $\inf_{a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}} \int_0^1 (1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)^2 dx$.

Exercice 4 Soit $\mathcal{S} = \{S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : {}^tS = S\}$. Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB)$. On note aussi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}$.
- b) Dans $\mathcal{S}$, déterminer l'orthogonal $\mathbb{R}I_2^\perp$ pour ce produit scalaire.
- c) Donner une base orthonormale de $\mathcal{S}$ pour ce produit scalaire.
- d) Soit $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^vS \in \mathcal{S}$, ${}^tPSP \in \mathcal{S}$ et déterminer l'adjoint de l'endomorphisme

$$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, S \mapsto {}^tPSP$$

pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- e) L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est-elle aussi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? *Justifier votre réponse.*

Exercice 5 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (y - z + 1, x + y + z, 3x + y - z) .$$

- a) Montrer que f est une application affine.
- b) Montrer que $f \circ f \circ f$ est une homothétie et trouver $A \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall M \in \mathbb{R}^3, f(f(f(M))) = A + \lambda \overrightarrow{AM} .$$