

Table des matières

I	Formes bilinéaires	1
I.1	Produit scalaire usuel	1
I.2	Formes bilinéaires	1
I.3	Matrices	2
I.4	Formules de changement de bases et congruence des matrices	4
I.5	Produits scalaires	5
I.6	Inégalité de Cauchy-Schwarz	6
I.7	Produit scalaire hermitien	7
II	Espaces euclidiens	7
II.1	Bases orthogonales	8
II.2	Procédé de Gram-Schmidt	8
II.3	Sous-espaces orthogonaux	13
II.4	Projections orthogonales	13
II.4.1	Définition	13
II.4.2	Formule	13
II.4.3	Distance à un sous-espace	13
II.5	Matrices de Gram	15
II.6	Angles entre vecteurs de \mathbb{R}^n	16
III	Matrices orthogonales	18
III.1	Dimension 2	19
III.2	Dimension 3	19
III.2.1	Axes d'une rotation.	19
III.2.2	Produit vectoriel	21
III.2.3	Formule de Rodrigues	21
III.2.4	Angles d'Euler	22
III.3	Symétries orthogonales	23
III.4	Les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$	23
IV	Réduction des endomorphismes autoadjoints	25
IV.1	Matrices symétriques	25
IV.1.1	Réduction	25
IV.2	Signature.	26

IV.3	Min-max.	26
IV.4	Adjoint d'un endomorphisme	27
IV.5	Réduction des endomorphismes normaux	29
IV.6	Décomposition polaire	30
V	Congruences	31
V.1	Formes quadratiques	31
V.2	Les matrices symétriques réelles	33
V.2.1	Formule de changement de bases	33
V.2.2	Théorème de Sylvester	33
V.2.3	Pseudo-réduction simultanée des matrices symétriques	34
V.3	Les matrices symétriques complexes	35
V.4	Les formes bilinéaires antisymétriques	36
V.4.1	le rang	36
V.4.2	Pfaffien	37
V.4.3	Le groupe symplectique $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ <i>Pas fait en cours</i>	38
V.5	Noyau et rang d'une forme bilinéaire	40
VI	Géométrie affine	40
VI.1	Sous-espaces affines de \mathbb{R}^n	40
VI.2	Espaces affines	41
VI.3	Transformations affines	43
VI.4	Isométries affines	44
VI.5	Isométries affines de \mathbb{R}^2	45
VI.6	Isométries affines de \mathbb{R}^3	46
VII	Coniques	47
VII.1	Définitions	47
VII.2	Forme réduite des coniques non dégénérées	48

I Formes bilinéaires

I.1 Produit scalaire usuel

C'est l'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ où si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Proposition.

- i) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto x \cdot y$ est linéaire.
- ii) $\forall y \in \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot y$ est linéaire.
- iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \cdot y = y \cdot x$.
- iv) $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n, x \cdot x > 0$.

Remarque. $x \cdot y = {}^t x y$.

Notation. Si $x \in \mathbb{R}^n$, soit $\|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x}$.

Théorème de Cauchy-Schwarz. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, |x \cdot y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$.

Démo.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 &\geq 0 \Leftrightarrow \sum_i \sum_j (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i y_i x_j y_j) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_i x_i^2 \right) \left(\sum_j y_j^2 \right) + \left(\sum_j x_j^2 \right) \left(\sum_i y_i^2 \right) - 2 \left(\sum_i x_i y_i \right) \left(\sum_j x_j y_j \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \|x\|_2^2 \|y\|_2^2 \geq 2 (x \cdot y)^2 \\ &\Leftrightarrow \|x\|_2 \|y\|_2 \geq |x \cdot y|. \end{aligned}$$

I.2 Formes bilinéaires

Définitions. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

- Une forme *bilinéaire* sur E est une application $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que
 - $\forall x \in E, b(x, \cdot) : E \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire ;
 - $\forall y \in E, b(\cdot, y) : E \rightarrow \mathbb{R}$ aussi.
- On dit que b est *symétrique* si $\forall x, y \in E, b(x, y) = b(y, x)$.
- On dit que b est *antisymétrique* si $\forall x, y \in E, b(x, y) = -b(y, x)$.
- On dit que b est *alternée* si $\forall x \in E, b(x, x) = 0$.

Notations. Soient $Bil(E)$, resp. $Bil_S(E)$, resp. $Bil_A(E)$, l'ensemble des formes bilinéaires sur E , resp. des formes bilinéaires symétriques, resp. l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques.

Exercices.

- 1) L'ensemble $Bil(E)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel pour les lois ordinaires et $Bil(E) = Bil_S(E) \oplus Bil_A(E)$.
- 2) *Polarisation.*
 - i) Soit $b \in Bil_S(E)$. Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $b(x, y) = \frac{1}{2}(b(x + y, x + y) - b(x, x) - b(y, y))$.
 - ii) Soit $b \in Bil(E)$. Alors b antisymétrique $\Leftrightarrow b$ alternée.

Exemples.

- a) Les applications suivantes sont bilinéaires symétriques.
 - $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$;
 - $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \text{Tr}AB$;
 - $l_2(\mathbb{N}) \times l_2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, $((a_n), (b_n)) \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n b_n^\dagger$;
 - $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 fg$.
- b) L'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$ est bilinéaire antisymétrique.
- c) L'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2$ est bilinéaire mais ni symétrique ni antisymétrique.

I.3 Matrices

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application

$$\varphi_A : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto {}^t X A Y$$

est bilinéaire.

Exercice. L'application φ_A est symétrique \Leftrightarrow la matrice A est symétrique. L'application φ_A est antisymétrique \Leftrightarrow la matrice A est antisymétrique.

Notations. Soient $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^t A = A\}$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^t A = -A\}$.

\dagger . $l_2(\mathbb{N}) = \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_n a_n^2 < \infty\}$

Définition. Matrice d'une forme bilinéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E . Si $\varphi \in \text{Bil}(E)$, on pose $[\varphi]_{\mathcal{B}} = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Proposition. Avec les notations de la définition.

$$\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \forall y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n, \varphi(x, y) = {}^t X A Y$$

où $A = [\varphi]_{\mathcal{B}}$, $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$, $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

On en déduit le

Théorème. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , de base \mathcal{B} . Alors l'application $\varphi \mapsto [\varphi]_{\mathcal{B}}$ définit des isomorphismes d'espaces vectoriels :

$$\text{Bil}(E) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$\text{Bil}_S(E) \simeq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$$\text{Bil}_A(E) \simeq \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) .$$

Exemples.

- a) Soit $E = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Soit $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Soit $\mathcal{B}' = (1, 2x - 1, 6x - 6x + 1)$. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Alors

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, [\varphi]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} .$$

- b) (*non donné cette année*) Soit $E = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Soit $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Soit $\mathcal{B}' = (1, x, 2x^2 - 1)$. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi f(\cos t)g(\cos t)dt$.
Alors

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{3\pi}{8} \end{pmatrix}, [\varphi]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} .$$

I.4 Formules de changement de bases et congruence des matrices

Proposition. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$

matrice diagonale par blocs avec d blocs $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de taille 2×2 .

Démo. Plus tard dans le cours.

I.5 Produits scalaires

Définitions. Soit $\varphi \in \text{Bil}_S(E)$.

- On dit que φ est *positive* si $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$.
- On dit que φ est *négative* si $\forall x \in E, \varphi(x, x) \leq 0$.
- On dit que φ est *définie positive* si $\forall 0 \neq x \in E, \varphi(x, x) > 0$.
- On dit que φ est *définie négative* si $\forall x \in E, \varphi(x, x) < 0$.

Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique et définie positive $\varphi \in \text{Bil}(E)$.

Exemple. Le produit scalaire usuel est un produit scalaire.

Exercices.

- 1) $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- 2) $(A, B) \mapsto -\text{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

fin du cours du 23 janvier

I.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique **positive**.

Théorème. Soient $x, y \in E$.

$$|\phi(x, y)| \leq \sqrt{\phi(x, x)}\sqrt{\phi(y, y)} .$$

Démo.

Soit $A = \begin{pmatrix} \phi(x, x) & \phi(x, y) \\ \phi(y, x) & \phi(y, y) \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre. Soit $0 \neq v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ un vecteur propre associé. On a :

$$Av = \lambda v \Rightarrow {}^t\bar{v}Av = \lambda {}^t\bar{v}v = \lambda(|v_1|^2 + |v_2|^2).$$

On a aussi :

$${}^t\bar{v}Av = \overline{{}^t\lambda(|v_1|^2 + |v_2|^2)} = \bar{\lambda}(|v_1|^2 + |v_2|^2).$$

Or,

$${}^t\bar{v}Av = {}^t\bar{v}{}^t\bar{A}v = {}^t\bar{v}Av$$

car A est symétrique réelle. Donc

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(|v_1|^2 + |v_2|^2) &= \lambda(|v_1|^2 + |v_2|^2) \\ \Rightarrow \bar{\lambda} &= \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de A sont réelles.

On a :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, (s, t)A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \phi(sx + ty, sx + ty) \geq 0 .$$

Donc si $v \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur propre de A pour une valeur propre $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$${}^t vAv = \alpha {}^t v.v \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0 .$$

Mais alors comme le déterminant est le produit des valeurs propres

$$\begin{aligned} \det A \geq 0 &\Rightarrow \phi(x, x)\phi(y, y) - \phi(x, y)^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{\phi(x, x)}\sqrt{\phi(y, y)} \geq |\phi(x, y)| . \end{aligned}$$

Corollaire. Si ϕ est un produit scalaire, si on pose $\|x\|_\phi = \sqrt{\phi(x, x)}$ pour tout $x \in E$, alors l'application $E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \|x\|_\phi$ est une *norme*, c-à-d

$$i) \forall x \in E, \|x\|_\phi \geq 0. ii) \|x\|_\phi = 0 \Leftrightarrow x = 0. iii) \forall x, y \in E, \|x + y\|_\phi \leq \|x\|_\phi + \|y\|_\phi.$$

Exercice. Identité du parallélogramme. $\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$

I.7 Produit scalaire hermitien

Soit E un \mathbb{C} –espace vectoriel.

Définitions.

a) On dit que l'application $E \times E \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est une *forme sesquilineaire* si

(i) $\forall x \in E, E \rightarrow \mathbb{C}, y \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire ;

(ii) $\forall y \in E, E \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \langle x, y \rangle$ est *antilinéaire*[†] ;

b) on dit que c'est une forme sesquilineaire hermitienne si de plus

$$(iii) \forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} ;$$

c) on dit que c'est un produit scalaire hermitien si de plus

$$(iv) \forall x \in E, \langle x, x \rangle > 0 .$$

Exemples.

a) $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$ est une forme hermitienne sur \mathbb{C}^n .

b) $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 \bar{f}g$ est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercices.

1) Notons $\langle x, y \rangle = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ avec $\alpha(x, y), \beta(x, y) \in \mathbb{R}$ pour tous $x, y \in E$. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme sesquilineaire hermitienne $\Leftrightarrow \alpha$ est bilinéaire symétrique réelle, β est bilinéaire antisymétrique réelle et $\forall x, y \in E, \alpha(x, iy) = -\beta(x, y)$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Vérifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $(X, Y) \mapsto {}^t X A Y$ est une forme sesquilineaire hermitienne $\Leftrightarrow {}^t \bar{A} = A$.

II Espaces euclidiens

Définitions.

— Un espace *préhilbertien* est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un \mathbb{R} –espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

— Un espace *euclidien* est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un \mathbb{R} –espace vectoriel de dimension finie et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

Exemple. \mathbb{R}^n avec le produit scalaire usuel.

[†]. c-à-d $\forall x, x' \in E, \langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle, \forall x \in E, \forall t \in \mathbb{C}, \langle tx, y \rangle = \bar{t} \langle x, y \rangle$.

II.1 Bases orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Définitions.

- On dit que $x, y \in E$ sont *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$.
- Une base *orthogonale* de E est une base (e_1, \dots, e_n) telle que $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- Une base *orthonormale* ou *orthonormée* de E est une base (e_1, \dots, e_n) telle que $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i, \langle e_i, e_i \rangle = 1$.

Théorème. Si E est un espace euclidien, alors E admet une base orthogonale. En particulier E admet une base orthonormale.

Exercices.

- (*Théorème de Pythagore*) Soient $x, y \in E$. Montrer que $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- Soit (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs **non nuls** de E telle que $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$. Vérifier que les e_i sont linéairement indépendants.
- Trouver une base orthonormale pour $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ avec le produit scalaire usuel.

II.2 Procédé de Gram-Schmidt

Théorème. Soit E un espace euclidien de base (e_1, \dots, e_n) . Il existe une unique base (f_1, \dots, f_n) de E telle que

- $\forall 1 \leq i \leq n, f_i \in e_i + \text{Vect}\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$;
- la base (f_1, \dots, f_n) est orthogonale.

Remarque. En particulier, la base $(\frac{f_1}{\|f_1\|}, \dots, \frac{f_n}{\|f_n\|})$ est orthonormale.

Nous allons démontrer le théorème plus général suivant.

Théorème. Soit (e_1, \dots, e_n) une base d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E . Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique telle que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \det(\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq k} \neq 0.$$

† Alors il existe une unique base (f_1, \dots, f_n) de E telle que :

- $\forall 1 \leq k \leq n, f_k \in e_k + \text{Vect}\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$.

†. Cette condition est vérifiée si φ est un produit scalaire. En effet dans ce cas, pour tout

ii) $\forall 1 \leq k \neq l \leq n, \varphi(f_k, f_l) = 0$.

De plus, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\det(\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq k} = \varphi(f_1, f_1) \dots \varphi(f_k, f_k)$.

Démo. On pose pour tout $1 \leq k \leq n$, $A_k = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

Unicité.

Si (f_1, \dots, f_n) et (f'_1, \dots, f'_n) sont deux bases de E telles que

$$\forall 1 \leq k \neq l \leq n, \varphi(f_k, f_l) = \varphi(f'_k, f'_l) = 0$$

$$\forall 1 \leq k \leq n, f_k, f'_k \in e_k + \text{Vect}\{e_1, \dots, e_{k-1}\},$$

Alors $\forall 1 \leq k \leq n$, $\text{Vect}\{f_1, \dots, f_k\} = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{Vect}\{f'_1, \dots, f'_k\}$. De plus, si $1 \leq k \leq n$, alors

$$f_k - f'_k \in \text{Vect}\{e_1, \dots, e_{k-1}\} = \text{Vect}\{f_1, \dots, f_k\} = \text{Vect}\{f'_1, \dots, f'_k\}.$$

Donc

$$f'_k = f_k + \sum_{1 \leq j \leq k-1} t_j f_j$$

pour certains réels t_j . Mais alors

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i \leq k-1, \varphi(f'_k, f_i) &= \varphi(f_k + \sum_{1 \leq j \leq k-1} t_j f_j, f_i) \\ &= \varphi(f_k, f_i) + \sum_{1 \leq j \leq k-1} t_j \varphi(f_j, f_i) \\ &= t_i \varphi(f_i, f_i) \end{aligned}$$

car $j \neq i \Rightarrow \varphi(f_j, f_i) = 0$.

$1 \leq k \leq n$, la matrice $A_k = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq k}$ est de noyau nul car si

$$\begin{aligned} 0 \neq x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k &\Rightarrow {}^t x A_k x = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i x_j \varphi(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \varphi(x_i e_i, x_j e_j) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^k x_i e_i, \sum_{j=1}^k x_j e_j\right) = \varphi(z, z) > 0 \end{aligned}$$

où $z := \sum_{i=1}^k x_i e_i \neq 0$. Donc $\det A_k \neq 0$.

Or, d'après la dernière phrase de l'énoncé (voir ci-dessous pour la justification), $\varphi(f_i, f_i) \neq 0$ donc $t_i = 0$. D'où $f'_k = f_k$.

Existence.

On définit par récurrence la base (f_1, \dots, f_n) . On pose $f_1 = e_1$. Alors $\varphi(f_1, f_1) = \varphi(e_1, e_1) = \det A_1 \neq 0$. On suppose que $k \geq 1$ et que f_1, \dots, f_k sont déjà définis avec les propriétés suivantes :

- $\forall 1 \leq i \neq k, \varphi(f_i, f_j) = 0$.
- $\forall 1 \leq i \leq k, f_i \in e_i + \text{Vect}\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$.

Supposons $k < n$. On remarque que la matrice de passage P_k de la base (e_1, \dots, e_k) dans la base (f_1, \dots, f_k) est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. [†]

Donc $\det P_k = 1$. Or, d'après la formule de changement de bases pour les formes bilinéaires, on a

$$(\varphi(f_i, f_j))_{1 \leq i, j \leq k} = {}^t P_k A_k P_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$$

et en appliquant le déterminant

$$\begin{aligned} \det(\varphi(f_i, f_j))_{1 \leq i, j \leq k} &= \det({}^t P_k) \det A_k \det P_k \\ &= \det A_k \neq 0. \end{aligned}$$

Or la matrice $(\varphi(f_i, f_j))_{1 \leq i, j \leq k}$ est diagonale donc

$$\det(\varphi(f_i, f_j))_{1 \leq i, j \leq k} = \varphi(f_1, f_1) \dots \varphi(f_k, f_k) = \det A_k \neq 0.$$

En particulier $\forall 1 \leq i \leq k, \varphi(f_i, f_i) \neq 0$. On peut donc poser

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\varphi(e_{k+1}, f_i)}{\varphi(f_i, f_i)} f_i \in e_{k+1} + \text{Vect}\{f_1, \dots, f_k\} \\ &\subseteq e_{k+1} + \text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\}. \end{aligned}$$

De plus, $\forall 1 \leq j \leq k, \varphi(f_{k+1}, f_j) = 0$.

En effet,

$$\forall 1 \leq j \leq k, \varphi(f_{k+1}, f_j) = \varphi(e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\varphi(e_{k+1}, f_i)}{\varphi(f_i, f_i)} f_i, f_j)$$

[†]. En effet, les coefficients P_{kij} de la matrice P_k vérifient $f_j = \sum_{i=1}^k P_{kij} e_i$. Comme les vecteurs e_1, \dots, e_n forment une base et comme $f_j \in e_j + \text{Vect}\{e_1, \dots, e_{j-1}\}$, on a $\forall j, P_{kjj} = 1, \forall i > j, P_{kij} = 0$.

$$\begin{aligned}
&= \varphi(e_{k+1}, f_j) - \sum_{i=1}^k \frac{\varphi(e_{k+1}, f_i)}{\varphi(f_i, f_i)} \varphi(f_i, f_j) \\
&= \varphi(e_{k+1}, f_j) - \frac{\varphi(e_{k+1}, f_j)}{\varphi(f_j, f_j)} \varphi(f_j, f_j) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Cela termine la construction de la famille (f_1, \dots, f_n) par récurrence.

Exercices.

- a) Si e_1, \dots, e_n est une base orthonormale de E , alors $\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in E, \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.
- b) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\pi f(\cos x)g(\cos x)dx$.

$$\begin{aligned}
f_0 &= e_0 = 1, f_1 = e_1 - \frac{\langle e_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 = X - \frac{\int_0^\pi \cos x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X, f_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \\
&\frac{\langle e_2, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 = X^2 - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx} X - \frac{\int_0^\pi \cos^2 x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X^2 - \frac{1}{2}, f_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} f_2 - \frac{\langle e_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \\
&\frac{\langle e_3, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 = X^3 - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x (\cos^2 x - \frac{1}{2}) dx}{\int_0^\pi (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 dx} (X^2 - \frac{1}{2}) - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx} X - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X^3 - \\
&\frac{3}{4} X, f_4 = e_4 - \frac{\langle e_4, f_3 \rangle}{\langle f_3, f_3 \rangle} f_3 - \frac{\langle e_4, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} f_2 - \frac{\langle e_4, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \frac{\langle e_4, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 = X^4 - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x (\cos^3 x - \frac{3}{4} \cos x) dx}{\int_0^\pi (\cos^3 x - \frac{3}{4} \cos x)^2 dx} (X^3 - \\
&\frac{3}{4} X) - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x (\cos^2 x - \frac{1}{2}) dx}{\int_0^\pi (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 dx} (X^2 - \frac{1}{2}) - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x \cos x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx} X - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X^4 - X^2 + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

- c) Critère de Sylvester. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée φ_A est un produit scalaire $\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \Delta_i(A) = \det(A_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq i} > 0$.

Indication. Soit $A_i = (A_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq i}$. Noter $b = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Appliquer le procédé de Gram-Schmidt aux vecteurs e_1, \dots, e_n et obtenir une base $b' = (f_1, \dots, f_n)$ orthogonale pour φ_A . Alors $D_i = {}^t P_i [\varphi_A]_{(e_1, \dots, e_i)} P_i$ où P_i est la matrice de passage de la base (e_1, \dots, e_i) dans la base (f_1, \dots, f_i) qui est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et D_i est la matrice de φ_A dans la base (f_1, \dots, f_i) qui est diagonale car la base (f_1, \dots, f_i) est orthogonale. Donc $\forall i, \varphi_A(f_1, f_1) \dots \varphi_A(f_i, f_i) = \det D_i = \Delta_i(A) \dots$

Si tous les $\Delta_i(A) > 0$, alors la forme bilinéaire φ_A est définie positive (dans la base (f_1, \dots, f_n) , c'est facile). Si φ_A est définie positive, alors pour tout $i, \Delta_i(A) = \varphi_A(f_1, f_1) \dots \varphi_A(f_i, f_i) > 0$.

Exemple. La matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ définit un produit scalaire car $\Delta_1(A) = 2, \Delta_2(A) = 3, \Delta_3(A) = 4, \Delta_4(A) = 5 > 0$.

Fin du cours du 30/1

II.3 Sous-espaces orthogonaux

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

Notation. Soit $X \subseteq E$. On pose $X^\perp = \{y \in E : \forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0\}$.

C'est l'orthogonal de X .

Proposition

- i) $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ est un sous-espace de E ;
- ii) $0^\perp = E, E^\perp = 0$,
- iii) $\forall F \leq E, F \leq F^{\perp\perp}, F^\perp = F^{\perp\perp\perp}, F + F^\perp = F \oplus F^\perp$,
- iv) $\forall F, G \leq E, (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp, F^\perp + G^\perp \leq (F \cap G)^\perp$.
- v) si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$ et si E est de dimension finie, alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$;
- vi) Si E est de dimension finie, alors $\forall F \leq E, F = F^{\perp\perp}, \forall F, G \leq E, F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

II.4 Projections orthogonales

Soit $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace euclidien.

II.4.1 Définition

Soit $F \leq E$. Soit $x \in E$. Soient $x_1 \in F, x_2 \in F^\perp$ tels que $x = x_1 + x_2$. On pose $p_F(x) = x_1$. C'est la *projection orthogonale de x sur F* .

Remarque. Soient $x, y \in E$. Alors $y = p_F(x) \Leftrightarrow y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Exercice. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow p^2 = p$ et $\ker p \perp \text{Im } p$.

II.4.2 Formule

Si f_1, \dots, f_k est une base orthonormale de F , alors $p_F(x) = \langle x, f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle x, f_k \rangle f_k$.

II.4.3 Distance à un sous-espace

Soit $x \in E$, alors $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$.

Proposition. (Matrice d'une projection orthogonale.) Soit p_F la projection orthogonale sur F . Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E , alors

$$[p_F]_{\mathcal{B}} = B({}^tBB)^{-1}B$$

où $B = (\langle e_i, f_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \in \mathcal{M}_{nk}$ est la matrice d'une base (f_1, \dots, f_k) quelconque de F dans la base \mathcal{B} .

Démo. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $[f]_{\mathcal{B}} = B({}^tBB)^{-1}B$. Soient $x \in E, y \in F$. Alors il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}), Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k1}(\mathbb{R})$ tels que $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n, y = y_1f_1 + \dots + y_k f_k$.

Alors

$$\begin{aligned} \langle x - f(x), y \rangle &= {}^t(X - B({}^tBB)^{-1}BX)BY \\ &= {}^tXBY - {}^tXB \underbrace{({}^tBB)^{-1}BB}_{=I_k}Y \\ &= {}^tXBY - {}^tXBY = 0 . \end{aligned}$$

C'est vrai pour tout $y \in F$ donc $x - f(x) \in F^\perp \Rightarrow f(x) = p_F(x)$.

Q.e.d.

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^n$, si d est une droite, alors $p_d = \frac{v^t v}{v^t v}$ où $v \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est le vecteur des coordonnées d'un vecteur directeur de d .

II.5 Matrices de Gram

Définition. Soient $e_1, \dots, e_n \in E$. On note $G(e_1, \dots, e_n) = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition.

- La matrice $G(e_1, \dots, e_n)$ est symétrique positive.
- La matrice $G(e_1, \dots, e_n)$ est symétrique définie positive $\Leftrightarrow \det G(e_1, \dots, e_n) > 0 \Leftrightarrow e_1, \dots, e_n$ sont \mathbb{R} -linéairement indépendants.
- Pour tout $x \in E$, $d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(x, f_1, \dots, f_n)}{\det G(f_1, \dots, f_n)}}$ pour toute base quelconque (f_1, \dots, f_n) de F .

Exercices.

1. Si $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\} \leq \mathbb{R}^2$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, alors (pour le produit scalaire usuel), $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $d((x, y), F) = \sqrt{\frac{|ax+by|}{a^2+b^2}}$.
2. Calculer $\inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$.

Réponse.

$$\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4}.$$

Fin du cours du 7/2

3. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$, on pose $P(a_1, \dots, a_n) = \{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n : 0 \leq t_1, \dots, t_n \leq 1\}$. On définit par récurrence $\text{vol}_1 P(a_1) = \|a_1\|$, $\text{vol}_n P(a_1, \dots, a_n) = \text{vol}_{n-1} P(a_1, \dots, a_{n-1}) d(a_n, P(a_1, \dots, a_{n-1}))$. Vérifier par récurrence sur n que

$$\text{vol}_n(P(a_1, \dots, a_n)) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_n)}^\dagger .$$

II.6 Angles entre vecteurs de \mathbb{R}^n .

Définition. Soient $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$. L'angle entre x, y est le réel $0 \leq \widehat{xy} \leq \pi$ tel que

$$\cos \widehat{xy} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} .$$

Exemple. $x \perp y \Leftrightarrow \widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$; x, y colinéaires $\Leftrightarrow \widehat{xy} = 0$ ou π .

Exercice. Soit un tétraèdre régulier dans \mathbb{R}^3 . L'angle entre les vecteurs issus du centre et pointés vers les sommets est $\arccos -\frac{1}{3} = \pi - \arctan(2\sqrt{2})$.

Indication. Soit c le cosinus de l'angle cherché. On a $\begin{vmatrix} 1 & c & c & c \\ c & 1 & c & c \\ c & c & 1 & c \\ c & c & c & 1 \end{vmatrix} = (c-1)^3(3c+1) =$

0 car 4 vecteurs dans \mathbb{R}^3 sont toujours liés.

†. On peut interpréter $\text{vol}_n P(a_1, \dots, a_n)$ comme le volume de $P(a_1, \dots, a_n)$.

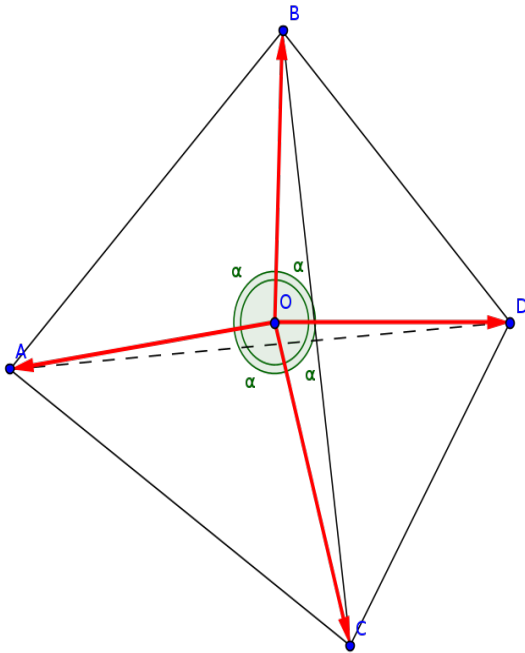


FIGURE 1 – $\alpha = \text{Arccos}(-\frac{1}{3})$

III Matrices orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Définition. Sont équivalentes.

- i) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.
- ii) $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
- iii) f envoie toute base orthonormale sur une base orthonormale.
- iv) f envoie une base orthonormale sur une base orthonormale.

On dit que f est une *transformation orthogonale* si une de ces assertions est vraie.

Notation. $O(E)$ = l'ensemble des transformations orthogonales de E .

Exercices.

- 1) $O(E) \leq \text{GL}(E)$ est un sous-groupe *c-à-d* $\text{Id}_E \in O(E), \forall f, g \in O(E), f \circ g \in O(E), \forall f \in O(E), f^{-1} \in O(E)$.
- 2) Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \in O(E) \Leftrightarrow [f]_{\mathcal{B}} \in O_n(\mathbb{R})$ pour toute base orthonormale \mathcal{B} de E (cf. définition ci-dessous) †.

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Sont équivalentes

- i) ${}^t M M = I_n$ « colonnes orthogonales ».
- ii) $M {}^t M = I_n$ « lignes orthogonales ».
- iii) M inversible et $M^{-1} = {}^t M$.

Si une de ces conditions est vérifiée, on dit que la matrice M est *orthogonale*.

Remarques. i) \Leftrightarrow « les colonnes de M forment une base orthonormale de \mathbb{R}^n »

ii) \Leftrightarrow « les lignes de M forment une base orthonormale de \mathbb{R}^n »

Une *matrice de rotation* est une matrice orthogonale de déterminant 1.

Notations. $O_n(\mathbb{R}), \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercices.

- 1) $\forall M = -{}^t M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exp M \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.
- 2) $\forall M = -{}^t M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), I + M$ est inversible et $(I - M)(I + M)^{-1} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$. ‡

†. En effet, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, si $A = [f]_{\mathcal{B}}$, alors $\forall 1 \leq j \leq n, f(e_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij} e_i \Rightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle \sum_k A_{ki} e_k, \sum_k A_{kj} e_k \rangle = \sum_k A_{ki} A_{kj} = ({}^t A A)_{ij}$.

‡. Si ${}^t M = -M$, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de M , alors il existe $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Mx = \lambda x \Rightarrow {}^t \bar{x} M x = \lambda {}^t \bar{x} x \Rightarrow {}^t \bar{x} M x = \bar{\lambda} {}^t \bar{x} x$. Or, on a aussi : ${}^t \bar{x} M x = {}^t \bar{x} {}^t M x = {}^t \bar{x} (-M)x = -\lambda {}^t \bar{x} x$. Comme ${}^t \bar{x} x = \sum_i |x_i|^2 > 0$, on peut simplifier et $\bar{\lambda} = -\lambda \Rightarrow \lambda \in i\mathbb{R}$. Donc M n'a pas de valeur propre réelle donc la matrice $M + I_n$ est inversible.

3) $SO_n(\mathbb{R}) \leq O_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$.

4) Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\det M = \pm 1$.

Exemples. Les matrices de permutations, $I_n - 2v^t v$ pour tout vecteur colonne v de norme 1 pour le produit scalaire usuel, $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \phi & \frac{1}{\phi} \\ -\phi & \frac{1}{\phi} & 1 \\ \frac{1}{\phi} & -1 & \phi \end{pmatrix}$ où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sont orthogonales.

Exercice. Si $n \geq 1$, alors $\sqrt{\frac{2}{n+1}} \left(\sin\left(\frac{ij\pi}{n+1}\right) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$.

III.1 Dimension 2

Proposition. $SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}$, $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) = \{S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Remarques. R_α est la rotation d'angle α , S_α est la symétrie orthogonale par rapport à la droite « qui fait un angle $\frac{\alpha}{2}$ avec l'axe des abscisses ».

Exercices.

1) $\forall \alpha, \beta, S_\alpha^2 = I_2, R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}, S_\alpha S_\beta = R_{\alpha-\beta}, S_\alpha R_\beta = S_{\alpha-\beta}, R_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta}$.

2) $R_\alpha = \exp \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

III.2 Dimension 3

III.2.1 Axes d'une rotation.

Théorème. Si $R \in O_3(\mathbb{R})$, alors il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $Rv = \pm v$.

Démo. (Euler) Si ${}^t R \neq R$, alors ${}^t R - R$ est antisymétrique de taille 3 non nulle donc de rang 2 (*exo*). Or, $\ker {}^t R - R$ est stable par R . Donc si $0 \neq v \in \ker {}^t R - R$, alors $Rv = \pm v$.

Si ${}^t R = R$, alors $R^2 = I_3 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \ker(R - I_3) \oplus \ker(R + I_3)$.

Définition. Soit $I_3 \neq R \in SO_3(\mathbb{R})$, alors $\dim \ker(R - I_3) = 1$ [†] On dit que $\ker(R - I_3)$ est l'axe de la rotation R .

[†]. Si $\dim \ker(R - I_3) = 3$, alors $R = I_3$ *absurde*. Si $\dim \ker(R - I_3) = 2$, alors le supplémentaire $\ker(R - I_3)^\perp$ est stable par R et est de dimension 1 donc un espace propre. La valeur propre associée est 1 (car le produit des valeurs propres est $\det R = 1$). Mais c'est impossible car alors $\dim \ker(R - I_3) = 3$. Si $\dim \ker(R - I_3) = 0$, alors les valeurs propres de R sont soit $-1, z, \bar{z}$ pour un $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *absurde* car alors $\det R = -|z|^2 \neq 1$, soit $-1, -1, -1$ (car les seules valeurs propres réelles sont ± 1) *absurde* car alors $\det R = (-1)^3 = -1 \neq 1$.

Corollaire. Soit $R \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$, alors si ${}^tR \neq R$, l'axe de la rotation R est

$$\ker R - I_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} \\ R_{12} - R_{21} \end{pmatrix} .$$

Démo. Si -1 est valeur propre d'une rotation R alors il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que

$${}^tPRP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

qui est symétrique ...

Exercice. $\forall R \in \text{SO}_3(\mathbb{R}), \exists P \in \text{SO}_3(\mathbb{R}), R = {}^tPR_{1,\theta}P$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$, où

$$R_{1,\theta} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} .$$

En déduire que toute rotation dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est produit de deux rotations d'angle π .

fin du cours du 13/2

III.2.2 Produit vectoriel

Définitions. (*Produit vectoriel et produit mixte*)

- 1) $\forall x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
- 2) $\forall x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' \in \mathbb{R}, \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right] := \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$

Propriétés.

- i) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire alternée.
- ii) $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3, [u, v, w] = (u \wedge v) \cdot w^\dagger$
- iii) $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3, u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w.$
- iv) $\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 \sin^2 \alpha$ où $\alpha \in [0, \pi], (u \cdot v) = \|u\|\|v\| \cos \alpha.$
- v) (Jacobi) $\forall u, v, w, u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0.$

Remarque. $\vec{x} \wedge \vec{y} \perp \vec{x}, \vec{y}.$

III.2.3 Formule de Rodrigues

Si $\vec{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose $\Lambda_{\vec{x}} := \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})^\ddagger.$ Soit

$\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de norme 1.

- La matrice de la rotation d'axe \vec{k} et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est $R_{\vec{k}, \theta} = I_3 + \sin \theta \Lambda_{\vec{k}} + (1 - \cos \theta) \Lambda_{\vec{k}}^2.$
- Comme application linéaire, on a :

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3, R_{\vec{k}, \theta}(\vec{v}) = \cos \theta \vec{v} + \sin \theta \vec{k} \wedge \vec{v} + (1 - \cos \theta)(\vec{k} \cdot \vec{v}) \vec{k}.$$

Exemples. $R_{\vec{e}_1, \theta} = R_{1, \theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, R_{\vec{e}_3, \theta} = R_{3, \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice. $R = \exp(\theta \Lambda_{\vec{k}}).$

En particulier, $R^{-1} = \exp(-\theta \Lambda_{\vec{k}}) = \exp({}^t(\theta \Lambda_{\vec{k}})) = {}^t \exp(\theta \Lambda_{\vec{k}}) = {}^t R$ et $\det R = \exp(\text{Tr}(\theta \Lambda_{\vec{k}})) = \exp 0 = 1.$

†. Pour le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^3 .

‡. C'est la matrice de $\vec{v} \mapsto \vec{x} \wedge \vec{v}.$

Solution. $\exp(\theta\Lambda_k) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\theta^q}{q!} \Lambda_k^q$. Or, un rapide calcul montre que $\forall q \geq 1, \Lambda_k^{2q} = (-1)^{q-1} \Lambda_k^2, \Lambda_k^{2q+1} = (-1)^q \Lambda_k$. Donc

$$\begin{aligned} \exp(\theta\Lambda_k) &= I_3 + \underbrace{\left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q-1}\theta^{2q}}{(2q)!}\right)}_{1-\cos\theta} \Lambda_k^2 + \underbrace{\left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q\theta^{2q+1}}{(2q+1)!}\right)}_{\sin\theta} \Lambda_k \\ &= I_3 + \sin\theta\Lambda_k + (1-\cos\theta)\Lambda_k^2 = R_{k,\theta}. \end{aligned}$$

III.2.4 Angles d'Euler

Exercice. Les matrices de $SO_3(\mathbb{R})$ sont de la forme

$$\begin{aligned} &R_{1,\alpha}R_{3,\beta}R_{1,\gamma} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c|cc} \cos\beta & -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma \\ \hline \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma \\ \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma \end{array} \right), \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Indication. Soit $R \in SO_3(\mathbb{R})$. il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $R(\vec{e}_1) = R_{1,\alpha}R_{3,\beta}(\vec{e}_1)^\dagger$.

Alors $\exists \gamma, (R_{1,\alpha}R_{3,\beta})^{-1}R = R_{1,\gamma}$.

Exemple. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R_{1,\pi}R_{3,-\frac{\pi}{2}}R_{1,-\frac{\pi}{2}}$.

$\dagger. \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, R(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$ ce qui est possible car $R(e_1)$ est un vecteur de norme 1.

III.3 Symétries orthogonales

Définition. Soit $F \leq E$. La *symétrie orthogonale* par rapport à F est l'application linéaire $s_F : E \rightarrow E$, $\forall x \in F, \forall y \in F^\perp, x + y \mapsto x - y$. C'-à-d : $\forall x \in F, s_F(x) = x, \forall y \in F^\perp, s_F(y) = -y$.

Si F est de codimension 1, on dit que c'est une *réflexion orthogonale*.

Exercices.

- 1) Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow s = \text{Id}_E$ et $\ker(s - 1) \perp \ker(s + 1)$.
- 2) Soit $F \leq E$. On a $s_F = 2p_F - \text{Id}_E = \text{Id}_E - 2p_{F^\perp}$.
- 3) Soit $0 \neq v \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur colonne. Montrer que $R_v := I_n - \frac{2}{v \cdot v} v \cdot {}^t v$ est une réflexion orthogonale. Par rapport au sous-espace $\mathbb{R}v^\perp$.
Par exemple si $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $R_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $R_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 4) Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est une matrice de symétrie orthogonale (pour le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n) $\Leftrightarrow S^2 = I_n$ et ${}^t S = S$.

Proposition. Une matrice de symétrie orthogonale est orthogonale. De plus, les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$.

III.4 Les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$

Proposition. Soit $O \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $k = \text{rang}(O - I_n)$.

- i) Si $R = r_1 \dots r_s$ où les r_i sont des réflexions orthogonales, alors $s \geq k$.
- ii) Il existe des réflexions orthogonales r_1, \dots, r_k telles que $O = r_1 \dots r_k$.

Démo. Soit R une réflexion orthogonale, alors

$$\ker(R - I_n) \cap \ker(RO - I_n) \leq \ker(O - I_n).$$

Or, $\dim \ker(R - I_n) = n - 1$ donc

$$\begin{aligned} \dim \left(\ker(R - I_n) \cap \ker(RO - I_n) \right) &= n - 1 + \dim \ker(RO - I_n) - \underbrace{\dim \left(\ker(R - I_n) + \ker(RO - I_n) \right)}_{= n - 1 \text{ ou } n} \\ &= \dim \ker(RO - I_n) \text{ ou } \dim \ker(RO - I_n) - 1 \\ &\geq \dim \ker(RO - I_n) - 1 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \dim \ker(O - I_n) &\geq \dim \ker(RO - I_n) - 1 \\ \Leftrightarrow n - \dim \ker(RO - I_n) &\geq n - \dim \ker(O - I_n) - 1 \\ \Leftrightarrow \operatorname{rg}(RO - I_n) &\geq \operatorname{rg}(O - I_n) - 1. \end{aligned}$$

i) Si $O = R_1 \dots R_s$, alors $R_s \dots R_1 O = I_n \Rightarrow \operatorname{rg}(R_s \dots R_1 O - I_n) = 0 \geq \operatorname{rg}(O - I_n) - s \Rightarrow s \geq k$.

ii) On raisonne par récurrence sur $k = \operatorname{rg}(O - I_n) \geq 0$.

Si $v = Ox - x \neq 0$, alors $\underbrace{\ker(O - I_n)}_{x \notin} \subsetneq \underbrace{\ker(R_v O - I_n)}_{x \in} \dagger \Rightarrow \operatorname{rg}(O - I_n) - 1 \leq \operatorname{rg}(R_v O - I_n) < \operatorname{rg}(O - I_n) \Rightarrow \operatorname{rg}(R_v O - I_n) = \operatorname{rg}(O - I_n) - 1$. Par hypothèse de récurrence, il existe R_1, \dots, R_{k-1} des réflexions orthogonales telles que :

$$R_v O = R_1 \dots R_{k-1} \Rightarrow O = R_v R_1 \dots R_{k-1}$$

produit de k réflexions orthogonales.

Exercices.

1) Si $R = r_1 \dots r_k$ où r_1, \dots, r_k sont des réflexions orthogonales, alors $k \geq \operatorname{rang}(R - I_n)$. *Indication.* $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall r$ réflexion orthogonale, $\operatorname{rang}(rA - I_n) \geq \operatorname{rang}(A - I_n) - 1$.

2) Soit $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in O_4(\mathbb{R})$. Alors $\operatorname{rang} O - I_4 = 3$ et

$$O = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \text{ réflexions orthogonales}}.$$

†. $v = Ox - x \neq 0 \Rightarrow x \notin \ker(O - I_n)$. D'autre part, $R_v O x = x \Leftrightarrow O x = R_v x \Leftrightarrow O x = x - \frac{2}{\|v\|^2} v^t v x \Leftrightarrow v = -\frac{2}{\|v\|^2} v^t v x \Leftrightarrow -\frac{2}{\|v\|^2} v^t v x = 1 \Leftrightarrow -2^t v x = {}^t v v \Leftrightarrow -2^t (Ox - x)x = {}^t (Ox - x)(Ox - x) \Leftrightarrow -2({}^t x^t O x - {}^t x x) = {}^t x \underbrace{{}^t O O}_{I_n} x - {}^t x^t O x - {}^t x O x + {}^t x x \Leftrightarrow {}^t x^t O x = {}^t x O x$ ce qui est

vrai car ${}^t x O x \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^t x O x = {}^t ({}^t x O x) = {}^t x^t O x$.

Enfin, $y \in \ker(O - I_n) \Leftrightarrow O y = y \Rightarrow {}^t v O y = {}^t v y = {}^t (Ox - x)y = {}^t x^t O y - {}^t x y = {}^t x y - {}^t x y = 0 \Rightarrow R_v O y = y - \frac{2}{\|v\|^2} v^t v O y = y$ c-à-d $y \in \ker(R_v O - I_n)$.

Méthode pour diagonaliser une matrice symétrique dans une base orthonormée

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- On cherche les valeurs propres distinctes de A : $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.
- Pour tout i , on cherche une base orthonormée de $\ker A - \lambda_i I_n$ notée \mathcal{B} (quitte à orthonormaliser une base quelconque).
- Alors la base $\mathcal{B} = \cup_i \mathcal{B}_i$ est une base orthonormée de vecteurs propres de A .

IV.2 Signature.

Définition. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A . On note $\text{sign}(A) = (p, q)$ la signature de A où

$$p = |\{1 \leq i \leq n : \lambda_i > 0\}|$$

$$q = |\{1 \leq i \leq n : \lambda_i < 0\}|;$$

c'est la *signature* de A .

Exercices.

- 1) $p + q = \text{rang}(A)$.
- 2) $\text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, 0)$, $\text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0)$, $\text{sign} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1)$.

Théorème. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\text{sign}(A) = \text{sign}(B) \Leftrightarrow \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), A = PB^tP.$$

Nous le démontrerons plus tard ...

IV.3 Min-max.

Théorème. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Alors

$$\lambda_k = \min_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = k}} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x = \max_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = n-k+1}} \min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x .$$

Démo. Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel) de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Soit $F_k = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} \leq \mathbb{R}^n$. Comme $\dim F_k = k$, on a bien

$$\min_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = k}} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x \leq \max_{\substack{x \in F_k \\ \|x\|=1}} {}^t x A x.$$

Or si $x = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k \in F_k$ est de norme 1, alors

$${}^t x A x = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_k x_k^2 \leq \lambda_k (x_1^2 + \dots + x_k^2) = \lambda_k$$

Donc

$$\min_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = k}} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x \leq \max_{\substack{x \in F_k \\ \|x\|=1}} {}^t x A x \leq \lambda_k.$$

D'un autre côté, si $\dim F = k$, alors $F \cap \text{Vect}\{e_k, \dots, e_n\} \neq 0^\dagger$ donc il existe $x = x_k e_k + \dots + x_n e_n \in F$ de norme 1.

Alors

$${}^t x A x = \lambda_k x_k^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \geq \lambda_k (x_k^2 + \dots + x_n^2) = \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k.$$

Donc

$$\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x \geq \lambda_k$$

et donc

$$\min_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = k}} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x \geq \lambda_k.$$

De même pour l'autre égalité.

Exercices.

- 1) Avec les notations du théorème, vérifier que si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda_1(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_1(A + B) \leq \lambda_n(A + B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$.
- 2) Démontrer le *critère de Sylvester avec les mineurs principaux* à l'aide du théorème ci-dessus.

IV.4 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème de Riesz. Soit E un espace euclidien. $\forall \lambda \in E^*$, $\exists ! x_\lambda \in E$, $\lambda = \langle x_\lambda, \cdot \rangle$.

†. car $\dim(F \cap \text{Vect}\{e_k, \dots, e_n\}) = \dim F + \dim \text{Vect}\{e_k, \dots, e_n\} - \dim(F + \text{Vect}\{e_k, \dots, e_n\}) \geq k + n - k + 1 - n = 1$.

Démo. L'application linéaire $\Phi : E \rightarrow E^*$, $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ est injective donc un isomorphisme car $\dim E = \dim E^*$.

Définitions. Soit E un espace euclidien. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle .$$

On dit que f est *autoadjoint* si $f^* = f$, *orthogonal* si $f^* = f^{-1}$, *normal* si $ff^* = f^*f$.

Démo de l'existence et l'unicité de f^ .*

Unicité.

Si $h_1, h_2 \in \mathcal{L}(E)$ vérifient

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, h_1(y) \rangle = \langle x, h_2(y) \rangle,$$

alors

$$\forall x, y \in E, \langle x, h_1(y) - h_2(y) \rangle = 0.$$

Si $y \in E$ est fixé, en prenant $x = h_1(y) - h_2(y)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle h_1(y) - h_2(y), h_1(y) - h_2(y) \rangle &= \|h_1(y) - h_2(y)\|^2 = 0 \\ \Rightarrow h_1(y) &= h_2(y). \end{aligned}$$

Existence.

Posons $f^* = \Phi^{-1} \circ {}^t f \circ \Phi$ où ${}^t f$ est l'application linéaire $E^* \rightarrow E^*$, $\lambda \mapsto \lambda \circ f$.

On a $\Phi \circ f^* = {}^t f \circ \Phi \Leftrightarrow \forall y \in E, \Phi(f^*(y)) = {}^t f(\Phi(y)) = \Phi(y) \circ f$. Donc

$$\forall y \in E, \forall x \in E, \Phi(f^*(y))(x) = \Phi(y)(f(x)) \Leftrightarrow \langle f^*(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle$$

et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique ...

Fin du cours du 6 mars

Exercices.

a) Si \mathcal{B} est une base orthonormée de E , alors $[f^*]_{\mathcal{B}} = {}^t[f]_{\mathcal{B}}$.

b) Montrer que l'opérateur $P \mapsto (1 - X^2)P'' - XP'$ est autoadjoint dans $R[X]_{\leq n}$ pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)dt = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$. †

Propriétés. $f^{**} = f$, $(f + \lambda g)^* = f^* + \lambda g^*$, $(fg)^* = g^* f^*$, $\text{Tr} f^* = \text{Tr} f$, $\det f^* = \det f$, $\ker f^* = \text{Im} f^\perp$, $\ker f^\perp = \text{Im} f^{*\dagger}$

†. Par *ipp*, vérifier que $\int_0^\pi ((1 - \cos^2 t)P''(\cos t) - \cos t P'(\cos t)Q(\cos t)dt = -\int_0^\pi \sin^2 t P'(\cos t)Q'(\cos t)dt = \int_0^\pi ((1 - \cos^2 t)Q''(\cos t) - \cos t Q'(\cos t))P(\cos t)dt$.
‡. $x \in \ker f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, \langle f(x), y \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, \langle x, f^*(y) \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in (\text{Im} f^*)^\perp$.

Exercices.

- 1) Si $F \leq E$ est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$, alors F^\perp est stable par f^* .
- 2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice avec une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que si A est symétrique, alors $\lambda \in \mathbb{R}$, si A est antisymétrique, alors $\lambda \in i\mathbb{R}$, si A est orthogonale, alors $|\lambda| = 1$.
- 3) Montrer qu'une matrice normale est diagonalisable sur \mathbb{C} .
- 4) Dédire du théorème que $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SO}_n(\mathbb{R})$ est surjective.
- 5) Une matrice antisymétrique réelle est de rang pair.

IV.6 Décomposition polaire

Théorème. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique $O \in O_n(\mathbb{R})$, une unique $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

Démo. Unicité. Si $x \in V_\lambda = \ker({}^tAA - \lambda I_n)$, alors $Sx = \sqrt{\lambda}x$ car $S(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$, $S|_{V_\lambda}$ est diagonalisable, $(S|_{V_\lambda})^2 = \lambda \text{Id}|_{V_\lambda}$ et les valeurs propres de S sont > 0 .

Or $\mathbb{R}^n = \bigoplus_\lambda V_\lambda$.

Existence. Soit S comme ci-dessus. Alors $S^2 = {}^tAA$ et $AS^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ car

$${}^t(AS^{-1})AS^{-1} = S^{-1}{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n .$$

Remarque. La matrice S est un polynôme en la matrice tAA !

Exercices.

- 1) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'existence.
- 2) Dédire du théorème que si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A = O_1DO_2$ où $O_1, O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à coefficients diagonaux $> 0^\dagger$.
- 3) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$, alors la décomposition polaire de A est donnée par la formule suivante.

$$A = OS$$

avec

$$O = \begin{cases} \frac{A + \text{Com}(A)}{\sqrt{\det(A + \text{Com}(A))}} = \frac{\begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c-b & a+d \end{pmatrix}}{\sqrt{(a+d)^2 + (b-c)^2}} & \text{si } \det A > 0, \\ \frac{A - \text{Com}(A)}{\sqrt{-\det(A - \text{Com}(A))}} = \frac{\begin{pmatrix} a-d & b+c \\ b+c & d-a \end{pmatrix}}{\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}} & \text{si } \det A < 0 \end{cases} \in O_2(\mathbb{R})$$

\dagger . *Solution.* Si $A = OS$, soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PD^tP$. Alors $A = \underbrace{OP}_{O_1} D \underbrace{{}^tP}_{O_2}$.

et $S = {}^tOA \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

V Congruences

V.1 Formes quadratiques

Définition. Une forme quadratique sur \mathbb{R}^n est une application $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} q_{ij} x_i x_j$$

pour certains $q_{ij} \in \mathbb{R}$.

Exemples.

- $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $q(x_1, x_2) = x_1 x_2$.
- $q(x) = l(x)^2$ si $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire.
- $q(x) = {}^t x A x$ si $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Théorème. *Loi d'inertie de Sylvester.*

Soit $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique, alors

- i) Il existe une base (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n et des $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, tels que $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$.
- ii) Il existe une base (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n et $r, s \in \mathbb{N}$ tels que $r + s \leq n$ et $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$.
- iii) De plus les nombres $r = |\{1 \leq i \leq n : a_i > 0\}|$ et $s = |\{1 \leq i \leq n : a_i < 0\}|$ ne dépendent que de q .

fin du cours du 20 mars

Démo. ii) $r = \max\{\dim F : F \leq \mathbb{R}^n \text{ et } q|_F \text{ est définie positive}\}$, $s = \max\{\dim F : F \leq \mathbb{R}^n \text{ et } q|_F \text{ est définie négative}\}^\dagger$.

En effet, si $F = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_r\}$, alors $q|_F$ est définie positive. Si d'un autre côté, $F \leq \mathbb{R}^n$ est un sous-espace tel que $q|_F$ est définie positive, alors $F \cap \text{Vect}\{e_{r+1}, \dots, e_n\} = 0$ car $\forall x = x_{r+1}e_{r+1} + \dots + x_n e_n$, $q(x) = -x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2 \leq 0$. Donc $\dim(F + \text{Vect}\{e_{r+1}, \dots, e_n\}) = \dim F + n - r \leq n \Rightarrow \dim F \leq r$.

Méthode de Gauss

Si $q = q(x_1, \dots, x_n)$, on montre par récurrence sur $n \geq 1$ qu'il existe (l_1, \dots, l_n) une base de $(\mathbb{R}^n)^*$ telle que $q = a_1 l_1^2 + \dots + a_n l_n^2$ pour certains $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

1. Si $a \neq 0$,

$$ax_1^2 + x_1 L(x_2, \dots, x_n) + Q_1(x_2, \dots, x_n) = a \underbrace{\left(x_1 + \frac{L}{2a}\right)^2}_{l_1} + Q_1 - \frac{L^2}{4a}$$

et on applique l'hypothèse de récurrence à $Q_1 - \frac{L^2}{4a}$ qui est une forme quadratique en x_2, \dots, x_n .

2. Si $a = 0$,

$$\begin{aligned} ax_1 x_2 + x_1 L_1(x_3, \dots) + x_2 L_2(x_3, \dots) + Q(x_3, \dots) &= a(x_1 + L_2)(x_2 + L_1) + Q - aL_1 L_2 \\ &= \frac{a}{4} \underbrace{(x_1 + x_2 + L_1 + L_2)^2}_{l_1} - \frac{a}{4} \underbrace{(x_1 - x_2 + L_1 - L_2)^2}_{l_2} + Q - aL_1 L_2 \end{aligned}$$

et on applique l'hypothèse de récurrence à $Q - aL_1 L_2$ qui est une forme quadratique en x_3, \dots, x_n

Exemples. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3 = (x_1 - \frac{x_2 + x_3}{2})^2 + \frac{3}{4}(x_2 - x_3)^2$; $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 - x_3^2$.

†) Si $q = a_1 l_1^2 + \dots + a_n l_n^2$, soient $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall 1 \leq i, j \leq n$, $l_i(e_j) = \delta_{ij}$ ‡

Alors on a $\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$.

Supposons $a_1, \dots, a_r > 0$ et $a_{r+1}, \dots, a_{r+s} < 0$ et $\forall r + s < i \leq n$, $a_i = 0$. Alors $q(t_1 \frac{e_1}{\sqrt{a_1}} + \dots + t_r \frac{e_r}{\sqrt{a_r}} + t_{r+1} \frac{e_{r+1}}{\sqrt{-a_{r+1}}} + \dots + t_{r+s} \frac{e_{r+s}}{\sqrt{-a_{r+s}}} + t_{r+s+1} e_{r+s+1} + \dots + t_n e_n) = t_1^2 + \dots + t_r^2 - t_{r+1}^2 - \dots - t_{r+s}^2$.

†. On dit que $q|_F$ est positive si $\forall x \in F$, $q(x) \geq 0$, $q|_F$ est définie positive si $\forall 0 \neq x \in F$, $q(x) > 0$, $q|_F$ est négative si $\forall x \in F$, $q(x) \leq 0$, $q|_F$ est définie négative si $\forall 0 \neq x \in F$, $q(x) < 0$

‡. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i$, $l_i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$. Alors A est inversible car les formes minéaires l_i sont linéairement indépendantes. Soit $C = A^{-1} = (c_{ij})$. Si $\forall j$, $e_j := {}^t(c_{1j}, \dots, c_{nj})$, alors $l_i(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} = (I_n)_{ij} = \delta_{ij}$.

V.2 Les matrices symétriques réelles

V.2.1 Formule de changement de bases

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q_A(x) = {}^t x A x$. C'est une forme quadratique et $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $q_A(x) = \sum_{i=1}^n A_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij} x_i x_j$.

Remarque. Si $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique, alors $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ est bilinéaire symétrique et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q(x) = B_q(x, x)$. Si $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de \mathbb{R}^n , on pose $[q]_{\mathcal{B}} := [B_q]_{\mathcal{B}} = (B_q(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} = (\frac{1}{2}(q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j)))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Remarque. Si $f(x_1, \dots, x_n) = q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$, alors $[q]_{\mathcal{B}} = \left(\frac{1}{2} \partial_{x_i x_j}^2 f \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice. Soit $A = [q]_{\mathcal{B}}$. Alors $\forall v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{R}^n$, $q(v) = {}^t x A x$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ UNE forme quadratique. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ DEUX bases de \mathbb{R}^n . Soit $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage[†]. Alors $A' = {}^t P A P$.

V.2.2 Théorème de Sylvester

Théorème. *Version matricielle de la loi d'inertie.* Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p + q \leq n$ et une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t P A P = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$. De plus

$$p = \max_{\substack{F \leq \mathbb{R}^n \\ \forall 0 \neq x \in F, {}^t x A x > 0}} \{\dim F\}, \quad q = \max_{\substack{F \leq \mathbb{R}^n \\ \forall 0 \neq x \in F, {}^t x A x < 0}} \{\dim F\}, \quad p + q = \text{rg} A .$$

Exemples.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} q_A(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 \\ &= -(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + 2x_2 x_3 \end{aligned}$$

†.

$$= -(x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

Soient $l_1 = x_1 - x_2$, $l_2 = x_2 + x_3$, $l_3 = x_3$.

soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\dagger$ et on trouve

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\ddagger$$

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} q_A(x_1, x_2, x_3) &= -x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2 \\ &= -x_2^2 + 2x_2(x_1 + x_3) + x_3^2 \\ &= -(x_2 - (x_1 + x_3))^2 + (x_1 + x_3)^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Soient $l_1 = -x_1 + x_2 - x_3$, $l_2 = x_1 + x_3$, $l_3 = x_3$.

soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on trouve

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\S$$

V.2.3 Pseudo-réduction simultanée des matrices symétriques

Théorème. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Si A est définie positive, alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que

$${}^tPAP = I_n, {}^tPBP = D.$$

Démo. Soit Q telle que ${}^tQAQ = I_n$. La matrice tQBQ est encore symétrique. Donc il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tO{}^tQBQO$ est diagonale. La matrice $P = QO$ convient.

†. Les lignes de la matrice dont P est l'inverse sont les coefficients des formes linéaires l_1, l_2, l_3 .

‡. Ici la recherche des valeurs propres de A n'est pas facile : on trouverait $2 \cos \frac{2\pi}{7}$, $2 \cos \frac{4\pi}{7}$, $2 \cos \frac{6\pi}{7}$

§. Ici la recherche des valeurs propres de A n'est pas facile : on trouverait $2 \cos \frac{2\pi}{9}$, $2 \cos \frac{4\pi}{9}$, $2 \cos \frac{8\pi}{9}$

Exemple. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines de $\det(B - \lambda A) = 0$. Soit (v_1, \dots, v_n) une base de \mathbb{R}^n orthonormée pour $(x, y)_A := {}^t x A y$ telle que $\forall i, B v_i = \lambda_i A v_i$. Alors $P = (v_1 | \dots | v_n)$ convient.

Exercice. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, trouver P, D .

Réponse. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ conviennent.

V.3 Les matrices symétriques complexes

Théorème. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^t A = A$. Alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de plus, $r = \text{rang} A$.

Démo. Soit $q(x) = {}^t x A x$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$. C'est une forme quadratique sur \mathbb{C}^n †. Comme dans le cas réel, il existe une base (l_1, \dots, l_n) de $(\mathbb{C}^n)^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, tels que dans cette base, la forme quadratique q vérifie : $q = a_1 l_1^2 + \dots + a_n l_n^2$. Supposons $a_1, \dots, a_r \neq 0$ et $a_{r+1} = \dots = a_n = 0$. Pour tout $1 \leq i \leq r$, soit $\alpha_i \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha_i^2 = a_i$. Alors $q = (\alpha_1 l_1)^2 + \dots + (\alpha_r l_r)^2$. On pose $\lambda_1 = \alpha_1 l_1, \dots, \lambda_r = \alpha_r l_r, \lambda_{r+1} = l_{r+1}, \dots, \lambda_n = l_n$. La famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une base de \mathbb{C}^n . Il suffit alors de trouver une base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{C}^n telle que $\forall i, j, \lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$. Alors $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, $q(t_1 v_1 + \dots + t_n v_n) = t_1^2 + \dots + t_r^2$. Si $P = (v_1 | \dots | v_n)$, c'est la matrice de passage de la base canonique dans la base (v_1, \dots, v_n) . Alors ${}^t P A P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Fin du cours du 27 mars

†. c -à- d un polynôme de degré 2 avec seulement des monômes $x_i x_j$, $1 \leq i \leq j \leq n$.

V.4 Les formes bilinéaires antisymétriques

Définition. Soit E un K -espace vectoriel. On dit que $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire antisymétrique si $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$.

Si K est de caractéristique $\neq 2$, alors $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On note $[\varphi]_{\mathcal{B}} = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de φ dans la base \mathcal{B} .

Remarque. Si $A = [\varphi]_{\mathcal{B}}$, si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in E$, alors $\varphi(x, y) = {}^t x A y$ où $x = {}^t(x_1, \dots, x_n), y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$.

Formule de changement de bases.

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E . Soit $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$. Soient $A = [\varphi]_{\mathcal{B}}, A' = [\varphi]_{\mathcal{B}'}$. Alors

$$A' = {}^t P A P.$$

Exemple. Soit $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Soit $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1)), \mathcal{B}' = ((1, -1), (1, 1))$. Alors dans ce cas, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

V.4.1 le rang

Soit $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, p$ premier.

Théorème. Soit $A \in \mathcal{A}_n(K)$. Alors il existe $P \in \text{GL}_n(K)$ telle que

$${}^t P A P = \left(\begin{array}{ccc|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \cdots & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right)$$

avec r blocs $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ où $2r = \text{rg} A$.

Démo. Si $n = 2$. On a

$$\forall m \neq 0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $n > 2$ et si $A \neq 0$, il existe des vecteurs $v_1, v_2 \in K^n$ tels que ${}^t v_1 A v_2 \neq 0$. On peut supposer que ${}^t v_1 A v_2 = 1$. Comme A est antisymétrique, $\forall i = 1, 2, {}^t v_i A v_i = 0$ donc v_1, v_2 sont indépendants et $F = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ est de dimension 2. Posons $L : K^n \rightarrow K^2, v \mapsto ({}^t v A v_1, {}^t v A v_2)$. C'est une application linéaire, surjective car $L(v_1) = (0, 1), L(v_2) = (-1, 0)$. Donc $\dim \ker L = n - 2$. Comme $\ker L \cap F = 0$

(car $\forall t_1, t_2 \in K, L(t_1v_1 + t_2v_2) = (-t_2, t_1) = 0 \Leftrightarrow t_1 = t_2 = 0$), $F \oplus \ker L = K^n$.
Soit (v_3, \dots, v_n) une base de $\ker L$.

Soit $P_1 = (v_1|v_2|v_3|\dots|v_n) \in \text{GL}_n(K)$ la matrice de passage de la base canonique dans la base (v_1, \dots, v_n) . On a :

$${}^tP_1AP_1 = ({}^tv_iAv_j)_{1 \leq i, j \leq n} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline & A_1 \end{array} \right)$$

où $A_1 \in \mathcal{A}_{n-2}(K)$.

On peut donc raisonner par récurrence ...

$$\text{Exemple. } {}^tP \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array} \right) P = \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right) & \\ \hline & \dots \\ \hline & \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

où $P = (\delta_{i,2j-1} + \delta_{i,2(j-n)})_{1 \leq i, j \leq 2n} \in O_{2n}(\mathbb{R})$.

V.4.2 Pfaffien

Définition. Soit $A \in \mathcal{A}_{2n}(K)$ une matrice antisymétrique. Si A est inversible, il existe $P \in \text{GL}_{2n}(K)$ telle que

$${}^tPAP = J := \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array} \right)$$

et on pose $Pf(A) = \det(P^{-1})$. Sinon, on pose $Pf(A) = 0$.

Proposition. *C'est bien défini!*

Démo. Nous le montrerons dans le cas réel seulement. Voir plus loin.

Exercices.

- 1) $(Pf A)^2 = \det A$.
- 2) $\text{Pf} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{23}a_{34}$.

Indication. Si $a_{12} \neq 0$, soient $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{23}}{a_{12}} & \frac{a_{24}}{a_{12}} \\ 0 & 1 & -\frac{a_{13}}{a_{12}} & -\frac{a_{14}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ -a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & -* & 0 \end{pmatrix}$$

où $* = a_{34} - \frac{a_{13}a_{24}}{a_{12}} + \frac{a_{23}a_{14}}{a_{12}}$.

- 3) $\forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), Pf({}^tPAP) = \det P Pf A$.

V.4.3 Le groupe symplectique $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ *Pas fait en cours ...*

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.

Définition. $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) : {}^tAJA = J\}$.

Théorème. $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\forall g \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, $\det g = 1$.

Démo. On vérifie que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ stable par ${}^t \cdot$ et que $g \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \det g^2 = 1 \Rightarrow \det g = \pm 1$. Soit $g \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R})$. Alors

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

pour certaines $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$${}^tgJg = J \Leftrightarrow Jg = gJ \Leftrightarrow A = D, B = -C .$$

Or

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ iI_n & -iI_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ iI_n & -iI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + iB & 0 \\ 0 & A - iB \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \det g = \left| \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \right| = |\det(A + iB)|^2 > 0 \Rightarrow \det g = 1 . \end{aligned}$$

On applique la décomposition polaire à $g \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ quelconque : $g = OS$ où $O \in \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R})$, $S \in \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})$. En particulier, $S = \sqrt{{}^tgg}$. Soit $B = {}^tgg$. Soit $P(X)$ tel que $\forall \lambda$ valeur propre de tgg , $P(\lambda) = \sqrt{\lambda}$, $P(\lambda^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Alors $P(B) = \sqrt{B}$, $P(B^{-1}) = \sqrt{B}^{-1}$.

Comme $B \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, $JB = {}^tB^{-1}J$. Donc

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N}, JB^n = ({}^tB^{-1})^n J \\ & \Rightarrow JP(B) = P({}^tB^{-1})J \\ & \Rightarrow J\sqrt{B} = \sqrt{B}^{-1}J \\ & \Rightarrow S = \sqrt{B} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})^\dagger \\ & \Rightarrow O \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \\ & \Rightarrow \det O = 1 \end{aligned}$$

†. *Autre méthode.* $S \in \mathrm{Sp}_{2n} \Leftrightarrow SJS = J \Leftrightarrow -JSJ = S^{-1} \Leftrightarrow -JS^{-1}J = S$. Or, $-JS^{-1}J$ est symétrique définie positive (ses valeurs propres sont les inverses de celles de S) et $(-JS^{-1}J)^2 = -J(S^{-1})^2J = -J(S^2)^{-1}J = -JB^{-1}J = B$ car $B \in \mathrm{Sp}_{2n}$. Donc $-JS^{-1}J = S = \sqrt{B}$, l'unique racine carrée définie positive de B .

car O orthogonale

$$\Rightarrow \det g = \det O \det S = \det S > 0$$

car S est symétrique définie positive

$$\Rightarrow \det g = 1$$

Q.e.d.

Exercices.

- 1) $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.
- 2) Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $\left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & {}^t A \end{array} \right) \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.
- 3) Si $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right) \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.
- 4) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array} \right) \in \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A + iB \in U_n^\dagger$.

†. On note $U_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : {}^t \overline{M} M = I_n\}$.

V.5 Noyau et rang d'une forme bilinéaire

Définitions. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Soit $\varphi \in \text{Bil}_S(E) \cup \text{Bil}_A(E)$.

— Le *noyau* de φ est $\ker \varphi = \{x \in E : \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$.

— Le *rang* de φ , noté $\text{rg}\varphi$, est la dimension de l'image de l'application linéaire $\gamma_\varphi : E \rightarrow E^*, x \mapsto \varphi(x, \cdot)^\dagger$.

— On dit que φ est *non dégénérée* si $\ker \varphi = 0$ (*pas fait en cours ...*).

Remarque. Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et de base \mathcal{B} , si on note \mathcal{B}^* la base duale de E^* , alors $[\varphi]_{\mathcal{B}} = [\gamma_\varphi]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^*} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème du rang pour les formes bilinéaires symétriques et antisymétriques. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . Soit $\varphi \in \text{Bil}_S(E) \cup \text{Bil}_A(E)$. Alors :

$$n = \dim \ker \varphi + \text{rg}\varphi .$$

VI Géométrie affine

VI.1 Sous-espaces affines de \mathbb{R}^n

Définition. On dit que $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine si $\mathcal{F} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} = x + F = \{x + u : u \in F\}$ pour un certain $x \in \mathcal{F}$ et un $F \leq \mathbb{R}^n$.

Remarque. Dans ce cas, F est unique et $F = \{x_1 - x_2 : x_1, x_2 \in \mathcal{F}\}$. On notera $\vec{\mathcal{F}} := F$ et $\dim \mathcal{F} = \dim \vec{\mathcal{F}}$.

Un sous-espace affine non vide de dimension 0 est un point. Un sous-espace affine de dimension 1 est une *droite*.

Exercices.

- 1) Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathcal{F}, \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{F}$.
- 2) Une intersection quelconque et une somme finie de sous-espaces affines sont encore affines.

Fin du cours du 3/4

†. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Exercices (suite)

- 3) Trouver l'équation de la droite qui passe par les points $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ du plan affine \mathbb{R}^2 .
- 4) Trouver les équations de la droite qui passe par les points $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ de l'espace affine \mathbb{R}^3 .

Remarquer que le système

$$\begin{cases} (y - y_A)(z_B - z_A) - (z - z_A)(y_B - y_A) = 0 \\ (z - z_A)(x_B - x_A) - (x - x_A)(z_B - z_A) = 0 \\ (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0 \end{cases}$$

est de rang 2.

- 5) Soient $d_i = (a_i x + b_i y + c_i = 0)$, $i = 1, 2, 3$ trois droites du plan affine \mathbb{R}^2 avec $\forall i = 1, 2, 3, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, (a_i, b_i) \neq (0, 0)$. Montrer que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow d_1, d_2, d_3$ sont concourantes ou $d_1 // d_2 // d_3$.

Définition. On dira qu'une application $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est affine s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^m$ et $\vec{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, T(x) = T(x_0) + \vec{T}(x - x_0).$$

Dans ce cas \vec{T} est unique, c'est la partie linéaire de T .

Exercice. L'application T est affine $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^m, T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y) \Leftrightarrow \forall 0 < \lambda < 1, \forall x, y \in \mathbb{R}^m, T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$.

Indications. Si $\lambda > 1$, alors $0 < \frac{1}{\lambda} < 1$ et

$$x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x + (1 - \lambda)y) + (1 - \frac{1}{\lambda})y.$$

Si $\lambda < 0$, alors $0 < \frac{1}{1 - \lambda} < 1$ et

$$y = \frac{1}{1 - \lambda}(\lambda x + (1 - \lambda)y) + (1 - \frac{1}{1 - \lambda})x.$$

VI.2 Espaces affines

Définition. Un espace affine réel est un ensemble \mathcal{E} avec une action simplement transitive d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E c-à-d une application

$$E \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

telle que

- (i) $\forall x \in \mathcal{E}, x + \vec{0} = x$.
(ii) $\forall x \in \mathcal{E}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, (x + \vec{u}) + \vec{v} = x + (\vec{u} + \vec{v})$.
(iii) $\forall x, y \in \mathcal{E}, \exists ! \vec{u} \in E, x + \vec{u} = y$.

La *dimension* de \mathcal{E} est $\dim \mathcal{E} = \dim E$.

Notation. Si $x + \vec{u} = y$, on note $\overrightarrow{xy} := \vec{u}$. On note parfois $E = \vec{\mathcal{E}}$.

Relation de Chasles. $\forall x, y, z \in \mathcal{E}, \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$.

Exemple. $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ avec $\vec{\mathcal{E}} = \mathbb{R}^n$ et l'addition usuelle.

Définition équivalente. Un ensemble \mathcal{E} est un \mathbb{R} –espace affine s'il existe un \mathbb{R} –espace vectoriel E et une application

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E, (x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$$

telle que :

$$\forall x \in \mathcal{E}, \forall \vec{u} \in E, \exists ! y \in \mathcal{E}, \overrightarrow{xy} = \vec{u} \text{ et } \forall x, y, z \in \mathcal{E}, \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}.$$

Définition. Sous-espaces affines. Soit \mathcal{E} un \mathbb{R} –espace affine. Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ est un *sous-espace affine* si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ou $\exists x \in \mathcal{F}, F \leq \vec{\mathcal{E}}, \mathcal{F} = x + F$.
($\Leftrightarrow \{\overrightarrow{ab} : a, b \in \mathcal{F}\} \leq \vec{\mathcal{E}}$).

Sous-espaces engendrés. Soit $\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{E}$. Soit $x_0 \in X$. On note $\text{Aff}(X) = x_0 + \text{Vect}\{\overrightarrow{x_0x} : x \in X\}$. C'est le plus petit sous-espace affine de \mathcal{E} contenant X . Et c'est indépendant du choix de $x_0 \in X$.

Barycentres.

Si $x, y \in \mathcal{E}$, espace affine, alors si $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, M \mapsto M + \lambda \overrightarrow{Mx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{My}$$

est constante. On note $P = \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{E}$ le point tel que :

$$\forall M \in \mathcal{E}, M + \lambda \overrightarrow{Mx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{My} = P.$$

En effet, si $M, N \in \mathcal{E}$, alors :

$$\begin{aligned} \lambda \overrightarrow{Nx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{Ny} &= \lambda \overrightarrow{NM} + \lambda \overrightarrow{Mx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{NM} + (1 - \lambda) \overrightarrow{My} \\ &= \overrightarrow{NM} + \lambda \overrightarrow{Mx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{My} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} N + \lambda \overrightarrow{Nx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{Ny} &= N + \overrightarrow{NM} + \lambda \overrightarrow{Mx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{My} \\ &= M + \lambda \overrightarrow{Mx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{My}. \end{aligned}$$

VI.3 Transformations affines

Soit \mathcal{E} un espace affine réel. On notera $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ le \mathbb{R} -espace vectoriel associé.

Proposition-définition. Soit $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application. Sont équivalentes :

- (i) Il existe $A \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{T} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ tels que

$$\forall M \in \mathcal{E}, T(M) = T(A) + \overrightarrow{T}(\overrightarrow{AM}) .$$

- (ii) Il existe $\overrightarrow{T} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ telle que

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \overrightarrow{T(M)T(N)} = \overrightarrow{T}(\overrightarrow{MN}) .$$

Si l'une de ces conditions est vérifiée, on dit que T est une *transformation affine*.

Exemples. Les translations $t_{\overrightarrow{u}} : x \mapsto x + \overrightarrow{u}$, les homothéties $h_{A,\lambda} : x \mapsto A + \lambda \overrightarrow{Ax}$, $A \in \mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont des applications affines et $\overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}}} = Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$, respectivement, $\overrightarrow{h_{A,\lambda}} = \lambda Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$.

Propriétés.

- Si S, T sont des transformations affines, alors $S \circ T$ aussi et $\overrightarrow{S \circ T} = \overrightarrow{S} \overrightarrow{T}$.
- Si T est une transformation affine bijective, alors sa réciproque T^{-1} aussi.
- $\forall T$ transformation affine, $\forall O \in \mathcal{E}$, $\exists ! \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $\exists ! T'$ transformation affine, $T'(O) = O$ et $T = t_{\overrightarrow{u}} \circ T'$.

Définition. Le *groupe affine* de \mathcal{E} , noté $GA(\mathcal{E})$, est le groupe des bijections affines $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$.

Exercice. Vérifier que $GA(\mathbb{R}) = \{x \mapsto ax + b : a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$.

Fin du cours du 10 avril

Définitions. Affinement indépendants. On dit que $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{E}$ sont \mathbb{R} -*affinement indépendants* si les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_N}$ sont \mathbb{R} -linéairement indépendants.

Repère. Un repère de \mathcal{E} est la donnée d'un point $O \in \mathcal{E}$ et d'une base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ de $\vec{\mathcal{E}}$.

Remarque. Dans ce cas, $\forall x \in \mathcal{E}, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x = O + x_1\vec{u}_1 + \dots + x_n\vec{u}_n$.

Exercice. À l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_N}$ sont \mathbb{R} -linéairement indépendants $\Leftrightarrow \forall i, \overrightarrow{A_iA_j}, 1 \leq j \neq i \leq N$ sont aussi \mathbb{R} -linéairement indépendants.

VI.4 Isométries affines

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien, *c-à-d* $\vec{\mathcal{E}}$ est un espace euclidien.

Théorème. Soit $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application telle que

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \|\overrightarrow{T(M)T(N)}\| = \|MN\| .$$

Alors T est une transformation affine bijective.

On dit que T est une *isométrie affine*.

Démo. Il suffit de démontrer que T est affine car alors $\vec{T} \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ est inversible et donc T est bijective (*exo*).

Supposons que $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel. On a $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n, 0 < \lambda < 1$. Soit $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Alors

$$\|z - x\| = (1 - \lambda)\|x - y\| \Rightarrow \|T(z) - T(x)\| = (1 - \lambda)\|T(x) - T(y)\|$$

$$\|z - y\| = \lambda\|x - y\| \Rightarrow \|T(z) - T(y)\| = \lambda\|T(x) - T(y)\|$$

$$\Rightarrow \|T(x) - T(y)\| = \|T(x) - T(z)\| + \|T(z) - T(y)\|$$

$$\Rightarrow \exists s > 0, T(z) - T(y) = s(T(x) - T(z)) .$$

Mais alors

$$T(z) = sT(x) + (1 - s)T(y) \Rightarrow \|T(z) - T(y)\| = s\|T(x) - T(y)\| = \lambda\|T(x) - T(y)\|$$

$$\Rightarrow s = \lambda$$

d'où $T(z) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$

Q.e.d.

Définition. Un *déplacement* est une isométrie f tel que $\det \vec{f} = 1$; un *antidéplacement* est une isométrie f tel que $\det \vec{f} = -1$.

VI.5 Isométries affines de \mathbb{R}^2

Exemples.

- a) Les translations.
 b) La rotation de centre $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, R_{y,\theta} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

- c) La symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta_{y,\theta} \subseteq \mathbb{R}^2$ qui passe par $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et qui fait un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses :

$\forall M, S_{y,\theta}(M) = M'$ tel que $\Delta_{y,\theta}$ est la *médiatrice* de $[M, M']^\dagger$.

C-à-d :

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, S_{y,\theta} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une isométrie ALORS

- f est une translation : $f = t_{\vec{u}}$ pour un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$;
- ou f est une rotation : $f = r_{A,\theta}$ pour un point $A \in \mathbb{R}^2$ et un angle $\theta \in \mathbb{R}$;
- ou f est une *réflexion glissée* : $f = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$ pour une droite affine $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ et un vecteur $\vec{u} \in \vec{\Delta}$.

Exercice. Trouver le centre de la rotation

$$(x, y) \mapsto \left(-\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} + 1 \right).$$

Lemme.

Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une isométrie d'un espace affine euclidien.

Alors il existe un unique $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - 1)$ et une unique isométrie affine $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ avec un point fixe tels que :

$$f = t_{\vec{u}} \circ g.$$

\dagger . c-à-d $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|Mx\| = \|M'x\|\}$

Démo. Unicité. $\ker(\vec{f} - 1) \oplus^\perp \text{Im}(\vec{f} - 1) = \vec{E}^\ddagger$. Si

$$f = \overset{t}{\vec{u}} \circ g = \overset{t}{\vec{v}} \circ h,$$

avec g, h isométries affines avec points fixes : O et O' , avec $\vec{u}, \vec{v} \in \ker \vec{f} - 1$, alors :

$$\begin{aligned} O + \vec{u} = O' + \vec{f}(\vec{O}'\vec{O}) + \vec{v} &\Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = (1 - \vec{f})(\vec{O}'\vec{O}) \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in \ker(\vec{f} - 1) \cap \text{Im}(\vec{f} - 1) = 0 \\ &\Rightarrow \vec{u} = \vec{v} \Rightarrow g = h. \end{aligned}$$

Existence. Supposons $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$. Alors d'après le lemme, pour un certain $u_1 \in \ker(\vec{f} - 1)$ et un $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = f(0) + \vec{f}(x) = u_1 + (1 - \vec{f})(y) + \vec{f}(x)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = u_1 + \underbrace{y + \vec{f}(x - y)}_{=:g(x)}$.

	Isométrie affine $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	Points fixes de T
	Identité	\mathbb{R}^2
	Translation $t_{\vec{u}}$ où $\vec{u} \neq \vec{0}$	\emptyset
En résumé :	Rotation de centre A et d'angle $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$	A
	Symétrie orthogonale s_Δ où $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ [†]	Δ
	Symétrie glissée $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$ où $\vec{0} \neq \vec{u} \in \vec{\Delta}$	\emptyset

VI.6 Isométries affines de \mathbb{R}^3

Non fait en cours Exemples.

- La rotation $R_{A, \vec{k}, \theta}(M) = A + R_{\vec{k}, \theta}(\vec{AM})$ d'angle θ et d'axe $A + \mathbb{R}\vec{k}$ où $\|\vec{k}\| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^3$.[‡]
- La réflexion orthogonale de plan $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^3$ définie par $r_{\mathcal{P}}(M) = M'$ où \mathcal{P} est le plan médiateur de $[MM']$ [§]

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une isométrie. ALORS

- f est une translation : $f = t_{\vec{u}}$ pour un $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$;
- ou f est un *vissage* : $f = t_{\vec{u}} \circ R_{A, \vec{k}, \theta}$ où $A \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{k}\| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in \mathbb{R}\vec{k}$;

[‡]. En effet, si $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}}$ est tel que $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$, si $\vec{y} \in \vec{\mathcal{E}}$, alors $\langle \vec{x}, \vec{f}(\vec{y}) - \vec{y} \rangle = \langle \vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y}) - \vec{y} \rangle = \langle \vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y}) \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. Donc $\ker(\vec{f} - 1) + \text{Im}(\vec{f} - 1) = \ker(\vec{f} - 1) \oplus^\perp \text{Im}(\vec{f} - 1)$ et par le théorème du rang, $\dim = \ker(\vec{f} - 1) \oplus^\perp \text{Im}(\vec{f} - 1) = \dim \mathcal{E}$.

[‡]. et $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{R}_{\vec{k}, \theta}(\vec{v}) = \cos \theta \vec{v} + \sin \theta \vec{k} \wedge \vec{v} + (1 - \cos \theta)(\vec{k} \cdot \vec{v}) \vec{k}$.

[§]. c -à-d $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|Mx\| = \|M'x\|\}$.

- ou f est une *antirotation* $f = S_{\mathcal{P}} \circ R$ où $S_{\mathcal{P}}$ est une réflexion orthogonale par rapport au plan \mathcal{P} , R est une rotation d'axe D avec $D \perp \mathcal{P}$;
- ou f est une *réflexion glissée* : $f = t_{\vec{u}} \circ S_{\mathcal{P}}$ où $S_{\mathcal{P}}$ est une réflexion orthogonale par rapport au plan \mathcal{P} avec $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$.

Corollaire. Un déplacement de \mathbb{R}^3 avec un point fixe est une rotation. (*Euler*)

Exemple. Soit $f(x, y, z) = (-y + 1, x + 1, z + 1)$. Alors f est un vissage : $f = t_{\vec{e}_3} \circ R_{A, \vec{e}_3, -\frac{\pi}{2}}$ avec $A = (0, 1, 0)$.

VII Coniques

VII.1 Définitions

On appelle *conique* un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 de la forme :

$$\mathcal{C}_F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$$

où $F(x, y) = \underbrace{ax^2 + bxy + cy^2}_{q_F(x, y)} + dx + ey + f$ pour certaines constantes $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Exemples : les cercles, les ellipses, les hyperboles, les paraboles.

On définit *l'homogénéisé* de F par :

$$H_F(x, y, z) := ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = z^2 F\left(\frac{1}{z}(x, y)\right).$$

Si une conique \mathcal{C} peut être définie par une fonction $F = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ telle que la matrice

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

est inversible, alors on dit que \mathcal{C} est une *conique non dégénérée*.

Remarque. La matrice $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$ est la matrice de la forme quadratique H_F dans la base canonique.

Exemple. La conique d'équation $x^2 - y = 0$ dans \mathbb{R}^2 est non dégénérée car si on pose $F(x, y) := x^2 - y$, alors $H_F(x, y, z) = x^2 - yz$ et la matrice associée est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ qui est inversible.

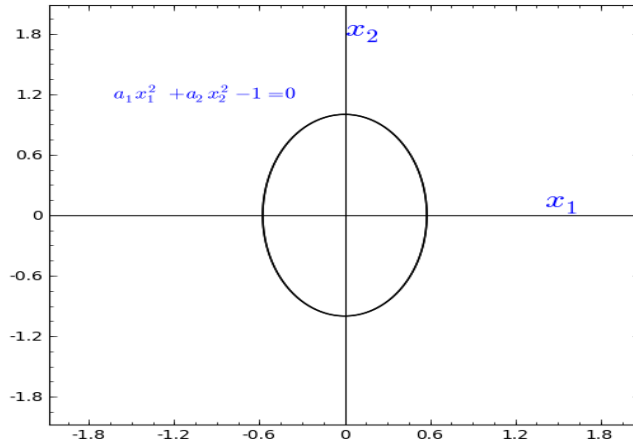


FIGURE 2 – ellipse

Remarque. Une conique, même non dégénérée, peut-être vide : $x^2 + y^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R}^2 .

VII.2 Forme réduite des coniques non dégénérées

Exemples de coniques non dégénérées

- l'ellipse d'équation $F(x_1, x_2) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - 1$ où $a_1, a_2 > 0$,
- l'hyperbole d'équation $F(x_1, x_2) = a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - 1$ où $a_1, a_2 > 0$,
- la parabole d'équation $F(x_1, x_2) = a_1x_1^2 - x_2$ où $a_1 > 0$

sont des coniques non dégénérées (on a $H_F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - x_3^2$ de signature $(2, 1)$ dans le premier cas, $H_F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - x_3^2$ de signature $(1, 2)$ dans le deuxième cas et $H_F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 - x_2x_3$, de signature $(2, 1)$, dans le dernier cas). Nous allons voir qu'à changement de repère orthonormal près ce sont les seules.

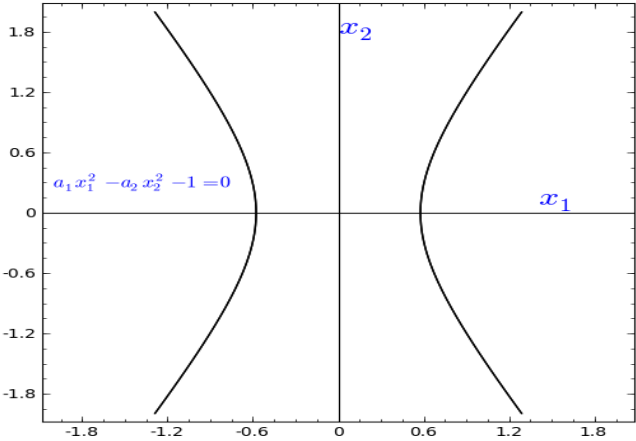


FIGURE 3 – hyperbole

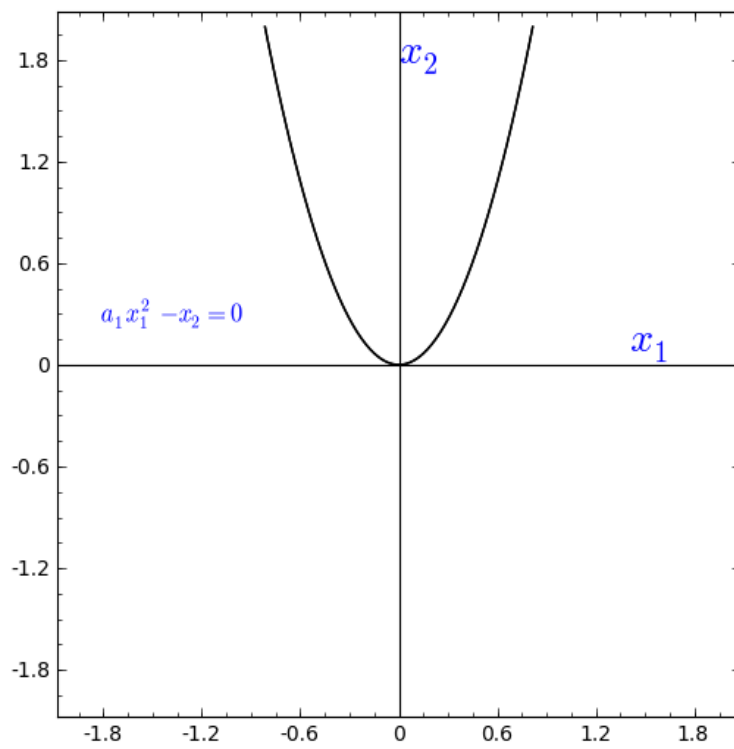


FIGURE 4 – parabole

Théorème VII.1 Soit \mathcal{C} une conique dans \mathbb{R}^2 d'équation :

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 .$$

On suppose que la matrice $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$ est inversible.

Alors

- ou bien \mathcal{C} est vide.
- ou bien il existe $\mathfrak{o} \in \mathbb{R}^2$, une base orthonormée u_1, u_2 de \mathbb{R}^2 et $a_1, a_2 > 0$ tels que :

$$(I) \quad \mathfrak{o} + x_1 u_1 + x_2 u_2 \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1$$

- ou bien il existe il existe $\mathfrak{o} \in \mathbb{R}^2$, une base orthonormée u_1, u_2 de \mathbb{R}^2 et $a_1, a_2 > 0$ tels que :

$$(II) \quad \mathfrak{o} + x_1 u_1 + x_2 u_2 \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1$$

- ou bien il existe il existe $\mathfrak{o} \in \mathbb{R}^2$, une base orthonormée u_1, u_2 de \mathbb{R}^2 et $a_1, a_2 > 0$ tels que :

$$(III) \quad \mathfrak{o} + x_1 u_1 + x_2 u_2 \in \mathcal{C} \Leftrightarrow a_1 x_1^2 - x_2 = 0.$$

On dit que les équations à droite du signe \Leftrightarrow sont les équations réduites de la conique \mathcal{C} .

FIN DU COURS

Ce qui suit n'a pas été fait en cours.

On dit que les droites $\mathbb{R}u_1$ et $\mathbb{R}u_2$ sont des *directions principales* de \mathcal{C} . Ces directions sont uniques si \mathcal{C} n'est pas un cercle (*i.e.* $a_1 \neq a_2$), ce sont les droites propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$.

Dans les cas (I) et (II), on dit que \mathfrak{o} est le centre de la conique et on appelle les droites $\mathfrak{o} + \mathbb{R}u_i$ des (les (si $a_1 \neq a_2$)) *axes principaux* de \mathcal{C} .

Démo.

Posons $q_F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, $l(x, y) = dx + ey$. Soit u_1, u_2 une base orthonormale de vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 .

On a alors : $q_F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

On a donc, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(x_1u_1 + x_2u_2) &= \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + l(x_1u_1 + x_2u_2) + f \\ &= \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + f \end{aligned}$$

avec $\alpha_i = l(u_i)$.

Remarque. Si $(\mathfrak{o}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est un repère du plan affine \mathbb{R}^2 , si $F_1(x_1, x_2) := F(\mathfrak{o} + x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2)$, alors

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, H_{F_1}(x_1, x_2, x_3) = H_F(x_1(\vec{u}_1, 0) + x_2(\vec{u}_2, 0) + x_3(o, 1)) .$$

Si $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, on a :

$$F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1\left(x_1 + \frac{\alpha_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(x_2 + \frac{\alpha_2}{2\lambda_2}\right)^2 + c'$$

pour une certaine constante c' . Si on pose $\mathfrak{o} := -\frac{\alpha_1}{2\lambda_1}u_1 - \frac{\alpha_2}{2\lambda_2}u_2$, on trouve :

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{o} + x_1u_1 + x_2u_2) &= F\left(\left(x_1 - \frac{\alpha_1}{2\lambda_1}\right)u_1 + \left(x_2 - \frac{\alpha_2}{2\lambda_2}\right)u_2\right) \\ &= \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + c' \end{aligned}$$

si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. En particulier, $c' = F(\mathfrak{o})$.

Or, si $G(x_1, x_2) := F(\mathfrak{o} + x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + c'$, on a :

$$H_G(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + c'x_3^2 .$$

Comme $H_G(x_1, x_2, x_3) = H_F(x_1(u_1, 0) + x_2(u_2, 0) + x_3(o, 1))$, H_G est non dégénérée et donc $c' = F(\mathfrak{o}) \neq 0$.

Donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{o} + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + F(\mathfrak{o}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})}x_1^2 + \frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{o})}x_2^2 = 1 \quad (*) . \end{aligned}$$

Si $\frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})}, \frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{o})} > 0$, on pose $a_i = \frac{-\lambda_i}{F(\mathfrak{o})}$. Si $\frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})} > 0, \frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{o})} < 0$, on pose $a_1 := \frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})}$ et $a_2 := \frac{\lambda_2}{F(\mathfrak{o})} > 0$. Si $\frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})} < 0, \frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{o})} > 0$, on échange u_1 et u_2 et on est ramené

au cas précédent. Enfin si $\frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{O})}, \frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{O})} < 0$, l'équation (*) n'a pas de solution donc $\mathcal{C} = \emptyset$.

Remarque. Comment trouver \mathfrak{O} ?

Réponse. Le point \mathfrak{O} est l'unique point de \mathbb{R}^2 qui vérifie le système :

$$\begin{cases} \partial F_x(\mathfrak{O}) = 0 \\ \partial F_y(\mathfrak{O}) = 0 \end{cases} .$$

En effet, d'après la formule de Taylor, on a :

$$F(\mathfrak{O} + v) = q_F(v) + \left\langle \begin{pmatrix} \partial F_x(\mathfrak{O}) \\ \partial F_y(\mathfrak{O}) \end{pmatrix}, v \right\rangle + F(\mathfrak{O})$$

pour tout vecteur v de \mathbb{R}^2 . Donc le point \mathfrak{O} vérifie :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \partial F_x(\mathfrak{O}) \\ \partial F_y(\mathfrak{O}) \end{pmatrix}, x_1 u_1 + x_2 u_2 \right\rangle = 0$$

pour tous $x_1 u_1 + x_2 u_2 \in \mathbb{R}^2$ donc :

$$\begin{cases} \partial F_x(\mathfrak{O}) = 0 \\ \partial F_y(\mathfrak{O}) = 0 \end{cases} .$$

De plus, on peut vérifier que ce système a une seule solution.

Si $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = 0$:

Soit (u_1, u_2) une base de vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, 0$.

Comme précédemment, on a :

$$F(x_1 u_1 + x_2 u_2) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + f$$

pour certaines constantes réelles α_1, α_2 . Comme $\lambda_1 \neq 0$, on a :

$$F(x_1 u_1 + x_2 u_2) = \lambda_1 \left(x_1 + \frac{\alpha_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \alpha_2 x_2 + c'$$

pour une certaine constante c' .

On pose $\mathfrak{o}' := -\frac{\alpha_1}{2\lambda_1} u_1$ et on trouve

$$G(x_1, x_2) := F(\mathfrak{o}' + x_1 u_1 + x_2 u_2) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2 + c' .$$

Or, H_F est non dégénérée donc H_G aussi. Mais :

$$H_G(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2 x_3 + c' x_3^2$$

qui est une forme quadratique de matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{2} \\ 0 & \frac{\alpha_2}{2} & c' \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Cette matrice doit être inversible donc $\alpha_2 \neq 0$.

On pose alors :

$$\mathfrak{O} := -\frac{\alpha_1}{2\lambda_1}u_1 - \frac{c'}{\alpha_2}u_2 .$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{O} + x_1u_1 + x_2u_2) &= F\left(\left(x_1 - \frac{\alpha_1}{2\lambda_1}\right)u_1 + \left(x_2 - \frac{c'}{\alpha_2}\right)u_2\right) \\ &= \lambda_1x_1^2 + \alpha_2x_2 . \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{O} + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow F(\mathfrak{O} + x_1u_1 + x_2u_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1x_1^2 + \alpha_2x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-\lambda_1}{\alpha_2}x_1^2 - x_2 = 0 . \end{aligned}$$

Quitte à changer u_2 en $-u_2$, on supposera que $\frac{-\lambda_1}{\alpha_2} > 0$. On pose alors $a_1 := \frac{-\lambda_1}{\alpha_2}$.

Remarque. Comment calculer \mathfrak{O} dans ce cas ?

Réponse. le point \mathfrak{O} est l'unique point de \mathbb{R}^2 tel que :

$$F(\mathfrak{O}) = 0 \text{ et } \left\langle \begin{pmatrix} \partial F_x(\mathfrak{O}) \\ \partial F_y(\mathfrak{O}) \end{pmatrix}, u_1 \right\rangle = 0$$

(exo).

De plus, pour ce point $\mathfrak{O} \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$F(\mathfrak{O} + x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1x_1^2 + \alpha_2x_2$$

où $\alpha_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \partial F_x(\mathfrak{O}) \\ \partial F_y(\mathfrak{O}) \end{pmatrix}, u_2 \right\rangle$.

Pour résumer, on a le tableau suivant pour une conique non dégénérée d'équation $F(x, y) = 0$ dans \mathbb{R}^2 :

$\text{sign}(q_F)$	nature de la conique
$(2, 0)$	ellipse \emptyset si $\text{sign}(H_F)=(2,1)$, si $\text{sign}(H_F)=(3,0)$
$(1, 1)$	hyperbole
$(1, 0)$	parabole

Exemple. On considère la conique \mathcal{C} d'équation :

$$x^2 + xy + y^2 + 4x + 3y + 4 = 0 .$$

Pour trouver $\mathfrak{O} = (x_0, y_0)$, on résout le système :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \partial_x F(\mathfrak{O}) = 0 \\ \partial_y F(\mathfrak{O}) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + y_0 + 4 = 0 \\ x_0 + 2y_0 + 3 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow x_0 = -\frac{5}{3}, y_0 = -\frac{2}{3} . \end{aligned}$$

On a de plus, $q_F(x, y) = x^2 + xy + y^2$. On cherche donc les valeurs propres λ_1, λ_2 de la matrice

$$[q_F] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

On trouve : $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. Si (u_1, u_2) est une base orthonormale de vecteurs propres associés à λ_1, λ_2 , alors on trouve :

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{O} + x_1 u_1 + x_2 u_2) &= F(\mathfrak{O}) + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} x_2^2 . \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{O} + x_1 u_1 + x_2 u_2 \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} x_2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2} x_1^2 + \frac{9}{2} x_2^2 = 1 . \end{aligned}$$

Donc \mathcal{C} est une ellipse de centre $(-5/3, -2/3)$ et dont les axes principaux sont les droites

$$\mathfrak{O} + \mathbb{R}u_1 = (y = -x - 7/3)$$

$$\mathfrak{O} + \mathbb{R}u_2 = (y = x + 1)$$

