

et $S = {}^tOA \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

V Congruences

V.1 Formes quadratiques

Définition. Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ est une application $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} q_{ij} x_i x_j$$

pour certains $q_{ij} \in \mathbb{R}$.

Exemples.

- $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $q(x_1, x_2) = x_1 x_2$.
- $q(x) = l(x)^2$ si $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire.
- $q(x) = {}^t x A x$ si $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Théorème. *Loi d'inertie de Sylvester.*

Soit $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique, alors

- i) Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et des $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, tels que $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$.
- ii) Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et $r, s \in \mathbb{N}$ tels que $r + s \leq n$ et $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$.
- iii) De plus les nombres $r = |\{1 \leq i \leq n : a_i > 0\}|$ et $s = |\{1 \leq i \leq n : a_i < 0\}|$ ne dépendent que de q .

fin du cours du 20 mars

Démo. ii) $r = \max\{\dim F : F \leq \mathbb{R}^n \text{ et } q|_F \text{ est définie positive}\}$, $s = \max\{\dim F : F \leq \mathbb{R}^n \text{ et } q|_F \text{ est définie négative}\}^\dagger$.

En effet, si $F = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_r\}$, alors $q|_F$ est définie positive. Si d'un autre côté, $F \leq \mathbb{R}^n$ est un sous-espace tel que $q|_F$ est définie positive, alors $F \cap \text{Vect}\{e_{r+1}, \dots, e_n\} = 0$ car $\forall x = x_{r+1}e_{r+1} + \dots + x_ne_n$, $q(x) = -x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2 \leq 0$. Donc $\dim(F + \text{Vect}\{e_{r+1}, \dots, e_n\}) = \dim F + n - r \leq n \Rightarrow \dim F \leq r$.

Méthode de Gauss

Si $q = q(x_1, \dots, x_n)$, on montre par récurrence sur $n \geq 1$ qu'il existe $(l_1, \dots, l_n)$ une base de $(\mathbb{R}^n)^*$ telle que $q = a_1l_1^2 + \dots + a_nl_n^2$ pour certains $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

1. Si $a \neq 0$,

$$ax_1^2 + x_1L(x_2, \dots, x_n) + Q_1(x_2, \dots, x_n) = a \underbrace{\left(x_1 + \frac{L}{2a}\right)^2}_{l_1} + Q_1 - \frac{L^2}{4a}$$

et on applique l'hypothèse de récurrence à $Q_1 - \frac{L^2}{4a}$ qui est une forme quadratique en $x_2, \dots, x_n$.

2. Si $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} ax_1x_2 + x_1L_1(x_3, \dots) + x_2L_2(x_3, \dots) + Q(x_3, \dots) &= a(x_1 + L_2)(x_2 + L_1) + Q - aL_1L_2 \\ &= \frac{a}{4} \underbrace{(x_1 + x_2 + L_1 + L_2)^2}_{l_1} - \frac{a}{4} \underbrace{(x_1 - x_2 + L_1 - L_2)^2}_{l_2} + Q - aL_1L_2 \end{aligned}$$

et on applique l'hypothèse de récurrence à $Q - aL_1L_2$ qui est une forme quadratique en $x_3, \dots, x_n$

Exemples. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = (x_1 - \frac{x_2+x_3}{2})^2 + \frac{3}{4}(x_2 - x_3)^2$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 - x_3^2$.

- i) Si $q = a_1l_1^2 + \dots + a_nl_n^2$, soient $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall 1 \leq i, j \leq n$, $l_i(e_j) = \delta_{ij}^\ddagger$

Alors on a $\forall x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, $q(x) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$.

Supposons $a_1, \dots, a_r > 0$ et $a_{r+1}, \dots, a_{r+s} < 0$ et $\forall r + s < i \leq n$, $a_i = 0$. Alors $q(t_1 \frac{e_1}{\sqrt{a_1}} + \dots + t_r \frac{e_r}{\sqrt{a_r}} + t_{r+1} \frac{e_{r+1}}{\sqrt{-a_{r+1}}} + \dots + t_{r+s} \frac{e_{r+s}}{\sqrt{-a_{r+s}}} + t_{r+s+1}e_{r+s+1} + \dots + t_ne_n) = t_1^2 + \dots + t_r^2 - t_{r+1}^2 - \dots - t_{r+s}^2$.

[†]. On dit que $q|_F$ est positive si $\forall x \in F$, $q(x) \geq 0$, $q|_F$ est définie positive si $\forall 0 \neq x \in F$, $q(x) > 0$, $q|_F$ est négative si $\forall x \in F$, $q(x) \leq 0$, $q|_F$ est définie négative si $\forall 0 \neq x \in F$, $q(x) < 0$

[‡]. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i$, $l_i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$. Alors A est inversible car les formes minéaires l_i sont linéairement indépendantes. Soit $C = A^{-1} = (c_{ij})$. Si $\forall j$, $e_j := {}^t(c_{1j}, \dots, c_{nj})$, alors $l_i(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} = (I_n)_{ij} = \delta_{ij}$.

V.2 Les matrices symétriques réelles

V.2.1 Formule de changement de bases

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q_A(x) = {}^t x A x$. C'est une forme quadratique et $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $q_A(x) = \sum_{i=1}^n A_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_{ij} x_i x_j$.

Remarque. Si $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique, alors $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ est bilinéaire symétrique et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q(x) = B_q(x, x)$. Si $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on pose $[q]_{\mathcal{B}} := [B_q]_{\mathcal{B}} = (B_q(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} = (\frac{1}{2}(q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j)))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Remarque. Si $f(x_1, \dots, x_n) = q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$, alors $[q]_{\mathcal{B}} = \left(\frac{1}{2} \partial_{x_i x_j}^2 f \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice. Soit $A = [q]_{\mathcal{B}}$. Alors $\forall v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{R}^n$, $q(v) = {}^t x A x$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ UNE forme quadratique. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ DEUX bases de $\mathbb{R}^n$. Soit $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage[†]. Alors $A' = {}^t P A P$.

V.2.2 Théorème de Sylvester

Théorème. *Version matricielle de la loi d'inertie.* Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p + q \leq n$ et une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t P A P = \begin{pmatrix} I_p & & \\ 0 & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$. De plus

$$p = \max_{\substack{F \leq \mathbb{R}^n \\ \forall 0 \neq x \in F, {}^t x A x > 0}} \{\dim F\}, \quad q = \max_{\substack{F \leq \mathbb{R}^n \\ \forall 0 \neq x \in F, {}^t x A x < 0}} \{\dim F\}, \quad p + q = \text{rg} A.$$

Exemples.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} q_A(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 \\ &= -(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + 2x_2 x_3 \end{aligned}$$

[†].

$$= -(x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

Soient $l_1 = x_1 - x_2$, $l_2 = x_2 + x_3$, $l_3 = x_3$.

soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\dagger$ et on trouve

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^\ddagger$$

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$q_A(x_1, x_2, x_3) = -x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$= -x_2^2 + 2x_2(x_1 + x_3) + x_3^2$$

$$= -(x_2 - (x_1 + x_3))^2 + (x_1 + x_3)^2 + x_3^2.$$

Soient $l_1 = -x_1 + x_2 - x_3$, $l_2 = x_1 + x_3$, $l_3 = x_3$.

soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on trouve

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^\S$$

V.2.3 Pseudo-réduction simultanée des matrices symétriques

Théorème. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Si A est *définie positive*, alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que

$${}^tPAP = I_n, {}^tPBP = D.$$

Démo. Soit Q telle que ${}^tQAQ = I_n$. La matrice tQBQ est encore symétrique. Donc il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tO{}^tQBQO$ est diagonale. La matrice $P = QO$ convient.

†. Les lignes de la matrice dont P est l'inverse sont les coefficients des formes linéaires l_1, l_2, l_3 .

‡. Ici la recherche des valeurs propres de A n'est pas facile : on trouverait $2 \cos \frac{2\pi}{7}$, $2 \cos \frac{4\pi}{7}$, $2 \cos \frac{6\pi}{7}$

§. Ici la recherche des valeurs propres de A n'est pas facile : on trouverait $2 \cos \frac{2\pi}{9}$, $2 \cos \frac{4\pi}{9}$, $2 \cos \frac{8\pi}{9}$

Exemple. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines de $\det(B - \lambda A) = 0$. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour $(x, y)_A := {}^t x A y$ telle que $\forall i, B v_i = \lambda_i A v_i$. Alors $P = (v_1 | \dots | v_n)$ convient.

Exercice. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, trouver P, D .

Réponse. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ conviennent.

V.3 Les matrices symétriques complexes

Théorème. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^t A = A$. Alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de plus, $r = \text{rang } A$.

Démo. Soit $q(x) = {}^t x A x$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$. C'est une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$.[†] Comme dans le cas réel, il existe une base $(l_1, \dots, l_n)$ de $(\mathbb{C}^n)^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, tels que dans cette base, la forme quadratique q vérifie : $q = a_1 l_1^2 + \dots + a_n l_n^2$. Supposons $a_1, \dots, a_r \neq 0$ et $a_{r+1} = \dots = a_n = 0$. Pour tout $1 \leq i \leq r$, soit $\alpha_i \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha_i^2 = a_i$. Alors $q = (\alpha_1 l_1)^2 + \dots + (\alpha_r l_r)^2$. On pose $\lambda_1 = \alpha_1 l_1, \dots, \lambda_r = \alpha_r l_r, \lambda_{r+1} = l_{r+1}, \dots, \lambda_n = l_n$. La famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$. Il suffit alors de trouver une base $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $\forall i, j, \lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$. Alors $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, $q(t_1 v_1 + \dots + t_n v_n) = t_1^2 + \dots + t_r^2$. Si $P = (v_1 | \dots | v_n)$, c'est la matrice de passage de la base canonique dans la base $(v_1, \dots, v_n)$. Alors ${}^t P A P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Fin du cours du 27 mars

[†]. c -à- d un polynôme de degré 2 avec seulement des monômes $x_i x_j$, $1 \leq i \leq j \leq n$.