

IV.5 Réduction des endomorphismes normaux

Théorème. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A^tA$. Alors il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = OD^tO = ODO^{-1}$$

où D est de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & x_r & & \\ & & & \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & \\ & & & \dots & \\ & & & & \begin{pmatrix} \alpha_s - \beta_s & \\ \beta_s & \alpha_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où $x_i, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $x_1, \dots, x_r, \alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_s \pm i\beta_s$ sont les valeurs propres de A .

Démo.

Lemme. Il existe un sous-espace $F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ de dimension 1 ou 2 stable par A .

Cas particuliers. A symétrique : $s = 0$; antisymétrique : $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$; orthogonale : $\lambda_1, \dots, \lambda_r = \pm 1$, $\alpha_i = \cos \theta_i$, $\beta_i = \sin \theta_i$.

fin du cours du 13 mars

Donc $\ker f = (\operatorname{Im} f^*)^\perp \Leftrightarrow \ker f^\perp = \operatorname{Im} f^*$

Exercices.

- 1) Si $F \leq E$ est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $F^\perp$ est stable par f^* .
- 2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice avec une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que si A est symétrique, alors $\lambda \in \mathbb{R}$, si A est antisymétrique, alors $\lambda \in i\mathbb{R}$, si A est orthogonale, alors $|\lambda| = 1$.
- 3) Montrer qu'une matrice normale est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
- 4) Dédire du théorème que $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SO}_n(\mathbb{R})$ est surjective.
- 5) Une matrice antisymétrique réelle est de rang pair.

IV.6 Décomposition polaire

Théorème. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique $O \in O_n(\mathbb{R})$, une unique $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

Démo. Unicité. Si $x \in V_\lambda = \ker({}^tAA - \lambda I_n)$, alors $Sx = \sqrt{\lambda}x$ car $S(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$, $S|_{V_\lambda}$ est diagonalisable, $(S|_{V_\lambda})^2 = \lambda \text{Id}|_{V_\lambda}$ et les valeurs propres de S sont > 0 .

Or $\mathbb{R}^n = \bigoplus_\lambda V_\lambda$.

Existence. Soit S comme ci-dessus. Alors $S^2 = {}^tAA$ et $AS^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ car

$${}^t(AS^{-1})AS^{-1} = S^{-1}{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n.$$

Remarque. La matrice S est un polynôme en la matrice tAA !

Exercices.

- 1) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'existence.
- 2) Dédire du théorème que si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A = O_1DO_2$ où $O_1, O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à coefficients diagonaux > 0 †.
- 3) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$, alors la décomposition polaire de A est donnée par la formule suivante.

$$A = OS$$

avec

$$O = \begin{cases} \frac{A + \text{Com}(A)}{\sqrt{\det(A + \text{Com}(A))}} = \frac{\begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c-b & a+d \end{pmatrix}}{\sqrt{(a+d)^2 + (b-c)^2}} & \text{si } \det A > 0, \\ \frac{A - \text{Com}(A)}{\sqrt{-\det(A - \text{Com}(A))}} = \frac{\begin{pmatrix} a-d & b+c \\ b+c & d-a \end{pmatrix}}{\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}} & \text{si } \det A < 0 \end{cases} \in O_2(\mathbb{R})$$

†. *Solution.* Si $A = OS$, soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PD^tP$. Alors $A = \underbrace{OP}_{O_1} D \underbrace{{}^tP}_{O_2}$.

et $S = {}^tOA \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

V Congruences

V.1 Formes quadratiques

Définition. Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ est une application $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} q_{ij} x_i x_j$$

pour certains $q_{ij} \in \mathbb{R}$.

Exemples.

- $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $q(x_1, x_2) = x_1 x_2$.
- $q(x) = l(x)^2$ si $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire.
- $q(x) = {}^t x A x$ si $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Théorème. *Loi d'inertie de Sylvester.*

Soit $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique, alors

- i) Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et des $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, tels que $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$.
- ii) De plus les nombres $r = |\{1 \leq i \leq n : a_i > 0\}|$ et $s = |\{1 \leq i \leq n : a_i < 0\}|$ ne dépendent que de q .
- iii) Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et $r, s \in \mathbb{N}$ tels que $r + s \leq n$ et $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$.

fin du cours du 20 mars