

Démo. L'application linéaire $\Phi : E \rightarrow E^*$, $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ est injective donc un isomorphisme car $\dim E = \dim E^*$.

Définitions. Soit E un espace euclidien. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

On dit que f est *autoadjoint* si $f^* = f$, *orthogonal* si $f^* = f^{-1}$, *normal* si $ff^* = f^*f$.

Démo de l'existence et l'unicité de f^ .*

Unicité.

Si $h_1, h_2 \in \mathcal{L}(E)$ vérifient

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, h_1(y) \rangle = \langle x, h_2(y) \rangle,$$

alors

$$\forall x, y \in E, \langle x, h_1(y) - h_2(y) \rangle = 0.$$

Si $y \in E$ est fixé, en prenant $x = h_1(y) - h_2(y)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle h_1(y) - h_2(y), h_1(y) - h_2(y) \rangle &= \|h_1(y) - h_2(y)\|^2 = 0 \\ \Rightarrow h_1(y) &= h_2(y). \end{aligned}$$

Existence.

Posons $f^* = \Phi^{-1} \circ {}^t f \circ \Phi$ où ${}^t f$ est l'application linéaire $E^* \rightarrow E^*$, $\lambda \mapsto \lambda \circ f$.

On a $\Phi \circ f^* = {}^t f \circ \Phi \Leftrightarrow \forall y \in E, \Phi(f^*(y)) = {}^t f(\Phi(y)) = \Phi(y) \circ f$. Donc

$$\forall y \in E, \forall x \in E, \Phi(f^*(y))(x) = \Phi(y)(f(x)) \Leftrightarrow \langle f^*(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle$$

et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique ...

Fin du cours du 6 mars

Exercices.

- Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E , alors $[f^*]_{\mathcal{B}} = {}^t[f]_{\mathcal{B}}$.
- Montrer que l'opérateur $P \mapsto (1 - X^2)P'' - XP'$ est autoadjoint dans $R[X]_{\leq n}$ pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)dt = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.[†]

Propriétés. $f^{**} = f$, $(f + \lambda g)^* = f^* + \lambda g^*$, $(fg)^* = g^*f^*$, $\text{Tr} f^* = \text{Tr} f$, $\det f^* = \det f$, $\ker f^* = \text{Im } f^\perp$, $\ker f^\perp = \text{Im } f^{*\dagger}$.

[†]. Par *ipp*, vérifier que $\int_0^\pi ((1 - \cos^2 t)P''(\cos t) - \cos t P'(\cos t)Q(\cos t)dt = -\int_0^\pi \sin^2 t P'(\cos t)Q'(\cos t)dt = \int_0^\pi ((1 - \cos^2 t)Q''(\cos t) - \cos t Q'(\cos t))P(\cos t)dt$.
[‡]. $x \in \ker f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, \langle f(x), y \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, \langle x, f^*(y) \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in (\text{Im } f^*)^\perp$.

IV.5 Réduction des endomorphismes normaux

Théorème. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A^tA$. Alors il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = OD^tO = ODO^{-1}$$

où D est de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & x_r & & \\ & & & \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & \\ & & & \dots & \\ & & & & \begin{pmatrix} \alpha_s - \beta_s & \\ \beta_s & \alpha_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où $x_i, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $x_1, \dots, x_r, \alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_s \pm i\beta_s$ sont les valeurs propres de A .

Démo.

Lemme. Il existe un sous-espace $F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ de dimension 1 ou 2 stable par A .

Cas particuliers. A symétrique : $s = 0$; antisymétrique : $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$; orthogonale : $\lambda_1, \dots, \lambda_r = \pm 1$, $\alpha_i = \cos \theta_i$, $\beta_i = \sin \theta_i$.

fin du cours du 13 mars

Donc $\ker f = (\operatorname{Im} f^*)^\perp \Leftrightarrow \ker f^\perp = \operatorname{Im} f^*$