

IV Réduction des endomorphismes autoadjoints

IV.1 Matrices symétriques

IV.1.1 Réduction

Théorème. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PD^tP$.

Lemme. A possède une valeur propre réelle.

Démo. du lemme. Si $Ax = \lambda x, 0 \neq x \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$, alors ${}^t\bar{x}Ax = {}^t(\bar{x}Ax) \Leftrightarrow \lambda {}^t\bar{x}x = \bar{\lambda} {}^t\bar{x}x \Leftrightarrow \bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Démo. Par récurrence sur $n \geq 0$.

Exemples.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = PD^tP \text{ où } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) Soit } T_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ 1 & & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}). \forall i, j, (T_n)_{ij} = 1 \text{ si } |j - i| = 1, 0$$

sinon.

$$\text{Alors } T_n = PD^tP \text{ où } P = \left(\sin \frac{ij\pi}{n+1} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 \cos \frac{\pi}{n+1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 \cos \frac{n\pi}{n+1} \end{pmatrix}.$$

En effet, $\forall x, \forall k \in \mathbb{N}, \sin((k+1)x) + \sin((k-1)x) = 2 \cos x \sin(kx) \sin(n+1)x$. En particulier si $v = \begin{pmatrix} \sin x \\ \vdots \\ \sin(nx) \end{pmatrix}$, alors

$T_n v = 2 \cos x v$ si $\sin((n+1)x) = 0$. On trouve ainsi n vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

Remarque. Si $\mathcal{T}_n \in \mathbb{Q}[X]$ est le polynôme de degré n tel que $\forall t, \sin((n+1)t) = \sin t \mathcal{T}_n(\cos t)$, alors $\chi_{T_n}(X) = \mathcal{T}_n\left(\frac{X}{2}\right)$.

Exercices.

1. Si $\lambda \neq \mu$, alors $\ker(A - \lambda) \perp \ker(A - \mu)$.
2. Montrer que la matrice symétrique $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Méthode pour diagonaliser une matrice symétrique dans une base orthonormée

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- On cherche les valeurs propres distinctes de $A : \lambda_1, \dots, \lambda_r$.
- Pour tout i , on cherche une base orthonormée de $\ker A - \lambda_i I_n$ notée $\mathcal{B}$ (quitte à orthonormaliser une base quelconque).
- Alors la base $\mathcal{B} = \cup_i \mathcal{B}_i$ est une base orthonormée de vecteurs propres de A .

IV.2 Signature.

Définition. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A . On note $\text{sign}(A) = (p, q)$ la signature de A où

$$p = |\{1 \leq i \leq n : \lambda_i > 0\}|$$

$$q = |\{1 \leq i \leq n : \lambda_i < 0\}|;$$

c'est la *signature* de A .

Exercices.

- 1) $p + q = \text{rang}(A)$.
- 2) $\text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, 0)$, $\text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0)$, $\text{sign} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1)$.

Théorème. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\text{sign}(A) = \text{sign}(B) \Leftrightarrow \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), A = PB^tP.$$

Nous le démontrerons plus tard ...

IV.3 Min-max.

Théorème. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Alors

$$\lambda_k = \min_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = k}} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x = \max_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = n-k+1}} \min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x .$$

Démo. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel) de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Soit $F_k = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} \leq \mathbb{R}^n$. Comme $\dim F_k = k$, on a bien

$$\min_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = k}} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x \leq \max_{\substack{x \in F_k \\ \|x\|=1}} {}^t x A x.$$

Or si $x = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k \in F_k$ est de norme 1, alors

$${}^t x A x = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_k x_k^2 \leq \lambda_k (x_1^2 + \dots + x_k^2) = \lambda_k$$

Donc

$$\min_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = k}} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x \leq \max_{\substack{x \in F_k \\ \|x\|=1}} {}^t x A x \leq \lambda_k.$$

D'un autre côté, si $\dim F = k$, alors $F \cap \text{Vect}\{e_k, \dots, e_n\} \neq 0^\dagger$ donc il existe $x = x_k e_k + \dots + x_n e_n \in F$ de norme 1.

Alors

$${}^t x A x = \lambda_k x_k^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \geq \lambda_k (x_k^2 + \dots + x_n^2) = \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k.$$

Donc

$$\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x \geq \lambda_k$$

et donc

$$\min_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = k}} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x \geq \lambda_k.$$

De même pour l'autre égalité.

Exercices.

- 1) Avec les notations du théorème, vérifier que si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda_1(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_1(A + B) \leq \lambda_n(A + B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$.
- 2) Démontrer le *critère de Sylvester avec les mineurs principaux* à l'aide du théorème ci-dessus.

IV.4 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème de Riesz. Soit E un espace euclidien. $\forall \lambda \in E^*, \exists ! x_\lambda \in E, \lambda = \langle x_\lambda, \cdot \rangle$.

$\dagger$. car $\dim(F \cap \text{Vect}\{e_k, \dots, e_n\}) = \dim F + \dim \text{Vect}\{e_k, \dots, e_n\} - \dim(F + \text{Vect}\{e_k, \dots, e_n\}) \geq k + n - k + 1 - n = 1$.

Démo. L'application linéaire $\Phi : E \rightarrow E^*, x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ est injective donc un isomorphisme car $\dim E = \dim E^*$.

Définitions. Soit E un espace euclidien. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

On dit que f est *autoadjoint* si $f^* = f$, *orthogonal* si $f^* = f^{-1}$, *normal* si $ff^* = f^*f$.

Démo de l'existence et l'unicité de f^ .*

Unicité.

Si $h_1, h_2 \in \mathcal{L}(E)$ vérifient

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, h_1(y) \rangle = \langle x, h_2(y) \rangle,$$

alors

$$\forall x, y \in E, \langle x, h_1(y) - h_2(y) \rangle = 0.$$

Si $y \in E$ est fixé, en prenant $x = h_1(y) - h_2(y)$, on a :

$$\langle h_1(y) - h_2(y), h_1(y) - h_2(y) \rangle = \|h_1(y) - h_2(y)\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow h_1(y) = h_2(y).$$

Existence.

Posons $f^* = \Phi^{-1} \circ {}^t f \circ \Phi$ où ${}^t f$ est l'application linéaire $E^* \rightarrow E^*, \lambda \mapsto \lambda \circ f$.

On a $\Phi \circ f^* = {}^t f \circ \Phi \Leftrightarrow \forall y \in E, \Phi(f^*(y)) = {}^t f(\Phi(y)) = \Phi(y) \circ f$. Donc

$$\forall y \in E, \forall x \in E, \Phi(f^*(y))(x) = \Phi(y)(f(x)) \Leftrightarrow \langle f^*(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle$$

et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique ...

Fin du cours du 6 mars

Exercices.

- Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E , alors $[f^*]_{\mathcal{B}} = {}^t[f]_{\mathcal{B}}$.
- Montrer que l'opérateur $P \mapsto (1 - X^2)P'' - XP'$ est autoadjoint dans $R[X]_{\leq n}$ pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)dt = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.[†]

[†]. Par *ipp*, vérifier que $\int_0^\pi ((1 - \cos^2 t)P''(\cos t) - \cos t P'(\cos t)Q(\cos t)dt = - \int_0^\pi \sin^2 t P'(\cos t)Q'(\cos t)dt = \int_0^\pi ((1 - \cos^2 t)Q''(\cos t) - \cos t Q'(\cos t))P(\cos t)dt$.

Propriétés. $f^{**} = f$, $(f + \lambda g)^* = f^* + \lambda g^*$, $(fg)^* = g^* f^*$, $\text{Tr} f^* = \text{Tr} f$, $\det f^* = \det f$, $\ker f^* = \text{Im} f^\perp$, $\ker f^\perp = \text{Im} f^*$.

Exercice. Soit f tel que $ff^* = f^*f$. Montrer que si $F \leq E$ est stable par f , alors $F^\perp$ aussi.