

III.2.2 Produit vectoriel

Définitions. (*Produit vectoriel et produit mixte*)

- 1) $\forall x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
- 2) $\forall x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' \in \mathbb{R}, \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right] := \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$

Propriétés.

- i) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire alternée.
- ii) $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3, [u, v, w] = (u \wedge v) \cdot w^\dagger$
- iii) $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3, u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w.$
- iv) $\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \alpha$ où $\alpha \in [0, \pi], (u \cdot v) = \|u\| \|v\| \cos \alpha.$
- v) (Jacobi) $\forall u, v, w, u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0.$

Remarque. $\vec{x} \wedge \vec{y} \perp \vec{x}, \vec{y}.$

III.2.3 Formule de Rodrigues

Si $\vec{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose $\Lambda_{\vec{x}} := \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})^\ddagger$. Soit

$\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de norme 1.

- La matrice de la rotation d'axe $\vec{k}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est $R_{\vec{k}, \theta} = I_3 + \sin \theta \Lambda_{\vec{k}} + (1 - \cos \theta) \Lambda_{\vec{k}}^2.$
- Comme application linéaire, on a :

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3, R_{\vec{k}, \theta}(\vec{v}) = \cos \theta \vec{v} + \sin \theta \vec{k} \wedge \vec{v} + (1 - \cos \theta)(\vec{k} \cdot \vec{v}) \vec{k}.$$

Exemples. $R_{\vec{e}_1, \theta} = R_{1, \theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, R_{\vec{e}_3, \theta} = R_{3, \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice. $R = \exp(\theta \Lambda_{\vec{k}}).$

En particulier, $R^{-1} = \exp(-\theta \Lambda_{\vec{k}}) = \exp({}^t(\theta \Lambda_{\vec{k}})) = {}^t \exp(\theta \Lambda_{\vec{k}}) = {}^t R$ et $\det R = \exp(\text{Tr}(\theta \Lambda_{\vec{k}})) = \exp 0 = 1.$

†. Pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

‡. C'est la matrice de $\vec{v} \mapsto \vec{x} \wedge \vec{v}.$

Solution. $\exp(\theta \Lambda_k) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\theta^q}{q!} \Lambda_k^q$. Or, un rapide calcul montre que $\forall q \geq 1, \Lambda_k^{2q} = (-1)^{q-1} \Lambda_k^2, \Lambda_k^{2q+1} = (-1)^q \Lambda_k$. Donc

$$\begin{aligned} \exp(\theta \Lambda_k) &= I_3 + \underbrace{\left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q-1} \theta^{2q}}{(2q)!} \right) \Lambda_k^2}_{1 - \cos \theta} + \underbrace{\left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q \theta^{2q+1}}{(2q+1)!} \right) \Lambda_k}_{\sin \theta} \\ &= I_3 + \sin \theta \Lambda_k + (1 - \cos \theta) \Lambda_k^2 = R_{k,\theta}. \end{aligned}$$

III.2.4 Angles d'Euler

Exercice. Les matrices de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ sont de la forme

$$\begin{aligned} &R_{1,\alpha} R_{3,\beta} R_{1,\gamma} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c} \cos \beta & -\sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ \hline \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \\ \hline \sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{array} \right), \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Indication. Soit $R \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$. il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $R(\vec{e}_1) = R_{1,\alpha} R_{3,\beta}(\vec{e}_1)^\dagger$. Alors $\exists \gamma, (R_{1,\alpha} R_{3,\beta})^{-1} R = R_{1,\gamma}$.

Exemple. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R_{1,\pi} R_{3,-\frac{\pi}{2}} R_{1,-\frac{\pi}{2}}.$

$\dagger. \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, R(e_1) = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}$ ce qui est possible car $R(e_1)$ est un vecteur de norme 1.

III.3 Symétries orthogonales

Définition. Soit $F \leq E$. La *symétrie orthogonale* par rapport à F est l'application linéaire $s_F : E \rightarrow E$, $\forall x \in F, \forall y \in F^\perp, x + y \mapsto x - y$. C'-à-d : $\forall x \in F, s_F(x) = x, \forall y \in F^\perp, s_F(y) = -y$.

Si F est de codimension 1, on dit que c'est une *réflexion orthogonale*.

Exercices.

- 1) Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow s = \text{Id}_E$ et $\ker(s - 1) \perp \ker(s + 1)$.
- 2) Soit $F \leq E$. On a $s_F = 2p_F - \text{Id}_E = \text{Id}_E - 2p_{F^\perp}$.
- 3) Soit $0 \neq v \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne. Montrer que $R_v := I_n - \frac{2}{{}^t v \cdot v} v \cdot {}^t v$ est une réflexion orthogonale. Par rapport au sous-espace $\mathbb{R}v^\perp$.
Par exemple si $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $R_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $R_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 4) Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est une matrice de symétrie orthogonale (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow S^2 = I_n$ et ${}^t S = S$.

Proposition. Une matrice de symétrie orthogonale est orthogonale. De plus, les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$.

III.4 Les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$

Proposition. Soit $O \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $k = \text{rang}(O - I_n)$.

- i) Si $R = r_1 \dots r_s$ où les r_i sont des réflexions orthogonales, alors $s \geq k$.
- ii) Il existe des réflexions orthogonales $r_1, \dots, r_k$ telles que $O = r_1 \dots r_k$.

Démo. Soit R une réflexion orthogonale, alors

$$\ker(R - I_n) \cap \ker(RO - I_n) \leq \ker(O - I_n).$$

Or, $\dim \ker(R - I_n) = n - 1$ donc

$$\begin{aligned} \dim \left(\ker(R - I_n) \cap \ker(RO - I_n) \right) &= n - 1 + \dim \ker(RO - I_n) - \underbrace{\dim \left(\ker(R - I_n) + \ker(RO - I_n) \right)}_{=n-1 \text{ ou } n} \\ &= \dim \ker(RO - I_n) \text{ ou } \dim \ker(RO - I_n) - 1 \\ &\geq \dim \ker(RO - I_n) - 1 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \dim \ker(O - I_n) &\geq \dim \ker(RO - I_n) - 1 \\ \Leftrightarrow n - \dim \ker(RO - I_n) &\geq n - \dim \ker(O - I_n) - 1 \\ \Leftrightarrow \operatorname{rg}(RO - I_n) &\geq \operatorname{rg}(O - I_n) - 1. \end{aligned}$$

i) Si $O = R_1 \dots R_s$, alors $R_s \dots R_1 O = I_n \Rightarrow \operatorname{rg}(R_s \dots R_1 O - I_n) = 0 \geq \operatorname{rg}(O - I_n) - s \Rightarrow s \geq k$.

ii) On raisonne par récurrence sur $k = \operatorname{rg}(O - I_n) \geq 0$.

Si $v = Ox - x \neq 0$, alors $\underbrace{\ker(O - I_n)}_{x \notin} \subsetneq \underbrace{\ker(R_v O - I_n)}_{x \in} \dagger \Rightarrow \operatorname{rg}(O - I_n) - 1 \leq \operatorname{rg}(R_v O - I_n) < \operatorname{rg}(O - I_n) \Rightarrow \operatorname{rg}(R_v O - I_n) = \operatorname{rg}(O - I_n) - 1$. Par hypothèse de récurrence, il existe $R_1, \dots, R_{k-1}$ des réflexions orthogonales telles que :

$$R_v O = R_1 \dots R_{k-1} \Rightarrow O = R_v R_1 \dots R_{k-1}$$

produit de k réflexions orthogonales.

Exercices.

1) Si $R = r_1 \dots r_k$ où $r_1, \dots, r_k$ sont des réflexions orthogonales, alors $k \geq \operatorname{rang}(R - I_n)$. *Indication.* $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall r$ réflexion orthogonale, $\operatorname{rang}(rA - I_n) \geq \operatorname{rang}(A - I_n) - 1$.

2) Soit $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in O_4(\mathbb{R})$. Alors $\operatorname{rang} O - I_4 = 3$ et

$$O = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \text{ réflexions orthogonales}}.$$

$\dagger$. $v = Ox - x \neq 0 \Rightarrow x \notin \ker(O - I_n)$. D'autre part, $R_v Ox = x \Leftrightarrow Ox = R_v x \Leftrightarrow Ox = x - \frac{2}{\langle v, v \rangle} v^t v x \Leftrightarrow v = -\frac{2}{\langle v, v \rangle} v^t v x \Leftrightarrow -\frac{2}{\langle v, v \rangle} v^t v x = 1 \Leftrightarrow -2^t v x = {}^t v v \Leftrightarrow -2^t (Ox - x)x = {}^t (Ox - x)(Ox - x) \Leftrightarrow -2({}^t x^t O x - {}^t x x) = {}^t x \underbrace{{}^t O O}_{I_n} x - {}^t x^t O x - {}^t x O x + {}^t x x \Leftrightarrow {}^t x^t O x = {}^t x O x$ ce qui est

vrai car ${}^t x O x \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^t x O x = {}^t ({}^t x O x) = {}^t x^t O x$.

Enfin, $y \in \ker(O - I_n) \Leftrightarrow Oy = y \Rightarrow {}^t v O y = {}^t v y = {}^t (Ox - x)y = {}^t x^t O y - {}^t x y = {}^t x y - {}^t x y = 0 \Rightarrow R_v O y = y - \frac{2}{\langle v, v \rangle} v^t v O y = y$ c-à-d $y \in \ker(R_v O - I_n)$.