

3. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$, on pose $P(a_1, \dots, a_n) = \{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n : 0 \leq t_1, \dots, t_n \leq 1\}$. On définit par récurrence $\text{vol}_1 P(a_1) = \|a_1\|$, $\text{vol}_n P(a_1, \dots, a_n) = \text{vol}_{n-1} P(a_1, \dots, a_{n-1}) d(a_n, P(a_1, \dots, a_{n-1}))$. Vérifier par récurrence sur n que

$$\text{vol}_n(P(a_1, \dots, a_n)) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_n)}^\dagger.$$

II.6 Angles entre vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition. Soient $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$. L'angle entre x, y est le réel $0 \leq \widehat{xy} \leq \pi$ tel que

$$\cos \widehat{xy} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

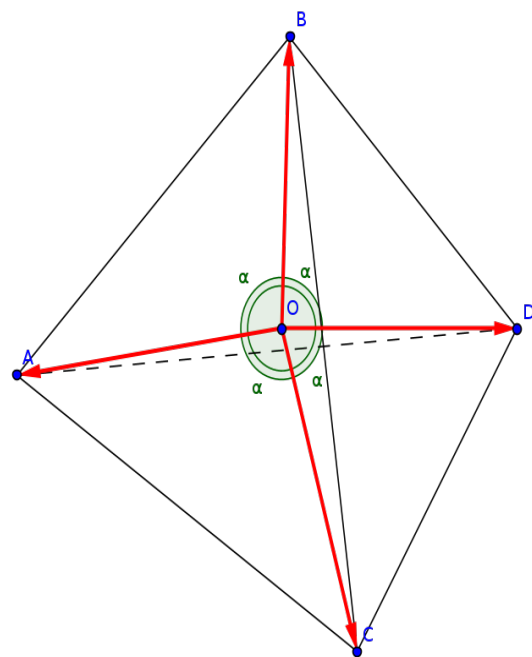
Exemple. $x \perp y \Leftrightarrow \widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$; x, y colinéaires $\Leftrightarrow \widehat{xy} = 0$ ou π .

Exercice. Soit un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$. L'angle entre les vecteurs issus du centre et pointés vers les sommets est $\arccos -\frac{1}{3} = \pi - \arctan(2\sqrt{2})$.

Indication. Soit c le cosinus de l'angle cherché. On a $\begin{vmatrix} 1 & c & c & c \\ c & 1 & c & c \\ c & c & 1 & c \\ c & c & c & 1 \end{vmatrix} = (c-1)^3(3c+1) =$

0 car 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ sont toujours liés.

[†]. On peut interpréter $\text{vol}_n P(a_1, \dots, a_n)$ comme le volume de $P(a_1, \dots, a_n)$.

FIGURE 1 – $\alpha = \text{Arccos}(-\frac{1}{3})$

III Matrices orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Définition. Sont équivalentes.

- i) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.
- ii) $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
- iii) f envoie toute base orthonormale sur une base orthonormale.
- iv) f envoie une base orthonormale sur une base orthonormale.

On dit que f est une *transformation orthogonale* si une de ces assertions est vraie.

Notation. $O(E)$ = l'ensemble des transformations orthogonales de E .

Exercices.

- 1) $O(E) \leq \text{GL}(E)$ est un sous-groupe *c-à-d* $\text{Id}_E \in O(E)$, $\forall f, g \in O(E), f \circ g \in O(E)$, $\forall f \in O(E), f^{-1} \in O(E)$.
- 2) Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \in O(E) \Leftrightarrow [f]_{\mathcal{B}} \in O_n(\mathbb{R})$ pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E (cf. définition ci-dessous)[†].

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Sont équivalentes

- i) ${}^tMM = I_n$ « colonnes orthogonales ».
- ii) $M^tM = I_n$ « lignes orthogonales ».
- iii) M inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

Si une de ces conditions est vérifiée, on dit que la matrice M est *orthogonale*.

Remarques. i) $\Leftrightarrow$ « les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ »

ii) $\Leftrightarrow$ « les lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ »

Une *matrice de rotation* est une matrice orthogonale de déterminant 1.

Notations. $O_n(\mathbb{R})$, $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercices.

- 1) $\forall M = -{}^tM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exp M \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.
- 2) $\forall M = -{}^tM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), I + M$ est inversible et $(I - M)(I + M)^{-1} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.[‡]

[†]. En effet, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, si $A = [f]_{\mathcal{B}}$, alors $\forall 1 \leq j \leq n, f(e_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij}e_i \Rightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle \sum_k A_{ki}e_k, \sum_k A_{kj}e_k \rangle = \sum_k A_{ki}A_{kj} = ({}^tAA)_{ij}$.

[‡]. Si ${}^tM = -M$, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de M , alors il existe $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Mx = \lambda x \Rightarrow {}^t\bar{x}Mx = \lambda {}^t\bar{x}x \Rightarrow {}^t\bar{x}Mx = \bar{\lambda} {}^t\bar{x}x$. Or, on a aussi : ${}^t\bar{x}Mx = {}^t\bar{x}{}^tMx = {}^t\bar{x}(-M)x = -\lambda {}^t\bar{x}x$. Comme ${}^t\bar{x}x = \sum_i |x_i|^2 > 0$, on peut simplifier et $\bar{\lambda} = -\lambda \Rightarrow \lambda \in i\mathbb{R}$. Donc M n'a pas de valeur propre réelle donc la matrice $M + I_n$ est inversible.

3) $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

4) Si $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\det M = \pm 1$.

Exemples. Les matrices de permutations, $I_n - 2v^t v$ pour tout vecteur colonne v de norme 1 pour le produit scalaire usuel, $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \phi & \frac{1}{\phi} \\ -\phi & \frac{1}{\phi} & 1 \\ \frac{1}{\phi} & -1 & \phi \end{pmatrix}$ où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sont orthogonales.

Exercice. Si $n \geq 1$, alors $\sqrt{\frac{2}{n+1}} \left(\sin\left(\frac{ij\pi}{n+1}\right) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

III.1 Dimension 2

Proposition. $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Remarques. R_α est la rotation d'angle α , S_α est la symétrie orthogonale par rapport à la droite « qui fait un angle $\frac{\alpha}{2}$ avec l'axe des abscisses ».

Exercices.

1) $\forall \alpha, \beta, S_\alpha^2 = I_2, R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}, S_\alpha S_\beta = R_{\alpha-\beta}, S_\alpha R_\beta = S_{\alpha-\beta}, R_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta}$.

2) $R_\alpha = \exp \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

III.2 Dimension 3

III.2.1 Axes d'une rotation.

Théorème. Si $R \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, alors il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $Rv = \pm v$.

Démo. (Euler) Si ${}^t R \neq R$, alors ${}^t R - R$ est antisymétrique de taille 3 non nulle donc de rang 2 (*exo*). Or, $\ker {}^t R - R$ est stable par R . Donc si $0 \neq v \in \ker {}^t R - R$, alors $Rv = \pm v$.

Si ${}^t R = R$, alors $R^2 = I_3 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \ker(R - I_3) \oplus \ker(R + I_3)$.

Définition. Soit $I_3 \neq R \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, alors $\dim \ker(R - I_3) = 1$ † On dit que $\ker(R - I_3)$ est l'axe de la rotation R .

†. Si $\dim \ker(R - I_3) = 3$, alors $R = I_3$ *absurde*. Si $\dim \ker(R - I_3) = 2$, alors le supplémentaire $\ker(R - I_3)^\perp$ est stable par R et est de dimension 1 donc un espace propre. La valeur propre associée est 1 (car le produit des valeurs propres est $\det R = 1$). Mais c'est impossible car alors $\dim \ker(R - I_3) = 3$. Si $\dim \ker(R - I_3) = 0$, alors les valeurs propres de R sont soit $-1, z, \bar{z}$ pour un $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *absurde* car alors $\det R = -|z|^2 \neq 1$, soit $-1, -1, -1$ (car les seules valeurs propres réelles sont ± 1) *absurde* car alors $\det R = (-1)^3 = -1 \neq 1$.

Corollaire. Soit $R \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$, alors si ${}^tR \neq R$, l'axe de la rotation R est

$$\ker R - I_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} \\ R_{12} - R_{21} \end{pmatrix}.$$

Démo. Si -1 est valeur propre d'une rotation R alors il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que

$${}^tPRP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

qui est symétrique ...

Exercice. $\forall R \in \text{SO}_3(\mathbb{R}), \exists P \in \text{SO}_3(\mathbb{R}), R = {}^tPR_{1,\theta}P$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$, où

$$R_{1,\theta} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

En déduire que toute rotation dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est produit de deux rotations d'angle π .

fin du cours du 13/2