

II.3 Sous-espaces orthogonaux

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

Notation. Soit $X \subseteq E$. On pose $X^\perp = \{y \in E : \forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0\}$.

C'est l'*orthogonal* de X .

Proposition

- i) $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ est un sous-espace de E ;
- ii) $0^\perp = E$, $E^\perp = 0$,
- iii) $\forall F \leqslant E$, $F \leqslant F^{\perp\perp}$, $F^\perp = F^{\perp\perp\perp}$, $F + F^\perp = F \oplus F^\perp$,
- iv) $\forall F, G \leqslant E$, $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $F^\perp + G^\perp \leqslant (F \cap G)^\perp$.
- v) si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$ et si E est de dimension finie, alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$;
- vi) Si E est de dimension finie, alors $\forall F \leqslant E$, $F = F^{\perp\perp}$, $\forall F, G \leqslant E$, $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

II.4 Projections orthogonales

Soit $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace euclidien.

II.4.1 Définition

Soit $F \leqslant E$. Soit $x \in E$. Soient $x_1 \in F$, $x_2 \in F^\perp$ tels que $x = x_1 + x_2$. On pose $p_F(x) = x_1$. C'est la *projection orthogonale de x sur F* .

Remarque. Soient $x, y \in E$. Alors $y = p_F(x) \Leftrightarrow y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Exercice. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow p^2 = p$ et $\ker p \perp \text{im } p$.

II.4.2 Formule

Si f_1, \dots, f_k est une base orthonormale de F , alors $p_F(x) = \langle x, f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle x, f_k \rangle f_k$.

II.4.3 Distance à un sous-espace

Soit $x \in E$, alors $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$.

Proposition. (Matrice d'une projection orthogonale.) Soit p_F la projection orthogonale sur F . Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E , alors

$$[p_F]_{\mathcal{B}} = B({}^t BB)^{-1} {}^t B$$

où $B = (\langle e_i, f_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \in \mathcal{M}_{nk}$ est la matrice d'une base (f_1, \dots, f_k) quelconque de F dans la base \mathcal{B} .

Démo. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $[f]_{\mathcal{B}} = B({}^t BB)^{-1} {}^t B$. Soient $x \in E$, $y \in F$. Alors il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k1}(\mathbb{R})$ tels que $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $y = y_1 f_1 + \dots + y_k f_k$.

Alors

$$\begin{aligned} \langle x - f(x), y \rangle &= {}^t(X - B({}^t BB)^{-1} {}^t B X) B Y \\ &= {}^t X B Y - {}^t X B \underbrace{({}^t BB)^{-1} {}^t B B Y}_{=I_k} \\ &= {}^t X B Y - {}^t X B Y = 0 . \end{aligned}$$

C'est vrai pour tout $y \in F$ donc $x - f(x) \in F^\perp \Rightarrow f(x) = p_F(x)$.

Q.e.d.

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^n$, si d est une droite, alors $p_d = \frac{v^t v}{v^t v} v v^t$ où $v \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est le vecteur des coordonnées d'un vecteur directeur de d .

II.5 Matrices de Gram

Définition. Soient $e_1, \dots, e_n \in E$. On note $G(e_1, \dots, e_n) = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition.

- La matrice $G(e_1, \dots, e_n)$ est symétrique positive.
- La matrice $G(e_1, \dots, e_n)$ est symétrique définie positive $\Leftrightarrow \det G(e_1, \dots, e_n) > 0 \Leftrightarrow e_1, \dots, e_n$ sont \mathbb{R} -linéairement indépendants.
- Pour tout $x \in E$, $d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(x, f_1, \dots, f_n)}{\det G(f_1, \dots, f_n)}}$ pour toute base quelconque (f_1, \dots, f_n) de F .

Exercices.

1. Si $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\} \leqslant \mathbb{R}^2$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, alors (pour le produit scalaire usuel), $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $d((x, y), F) = \sqrt{\frac{|ax+by|}{a^2+b^2}}$.
2. Calculer $\inf_{a, b, c \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$.

Réponse.

$$\sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & \frac{5}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{4}{6} & \frac{3}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{2}{4} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix}}} = \frac{1}{4}.$$

Fin du cours du 7/2