I.7 Produit scalaire hermitien

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

Définitions.

a) On dit que l'application $E \times E \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est une *forme sesquilinéaire* si

(i) $^\forall x \in E$, $E \to \mathbb{C}$, $y \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire ;

(ii) $^\forall y \in E$, $E \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est *antilinéaire* † ;

b) on dit que c'est une forme sesquilinéaire hermitienne si de plus

$$(iii)\ ^\forall x, y \in E,\ \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}\ ;$$

c) on dit que c'est un produit scalaire hermitien si de plus

$$(iv)\ ^\forall x \in E,\ \langle x, x\rangle > 0\,.$$

Exemples.

a) $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$ est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$.

b) $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 \overline{f} g$ est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercices.

1) Notons $\langle x, y\rangle = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ avec $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y) \in \mathbb{R}$ pour tous $x, y \in E$. Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne $\Leftrightarrow$ α est bilinéaire symétrique réelle, β est bilinéaire antisymétrique réelle et $^\forall x, y \in E$, $\alpha(x, iy) = -\beta(x, y)$..

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Vérifier que $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $(X, Y) \mapsto {}^tXAY$ est une forme sesquilinéaire hermitienne $\Leftrightarrow$ ${}^t\overline{A} = A$.

II Espaces euclidiens

Définitions.

— Un espace *préhilbertien* est un couple $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ où E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E.

— Un espace *euclidien* est un couple $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ où E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel *de dimension finie* et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E.

Exemple. $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel.

†. *c-à-d* $^\forall x, x' \in E$, $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$, $^\forall x \in E$, $^\forall t \in \mathbb{C}$, $\langle tx, y\rangle = \bar{t}\langle x, y\rangle$.

II.1 Bases orthogonales

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

Définitions.

a) On dit que $x, y \in E$ sont *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$.

b) Une base *orthogonale* de E est une base $(e_1, ..., e_n)$ telle que $\forall i \neq j,\ \langle e_i, e_j\rangle = 0$.

c) Une base *orthonormale ou orthonormée* de E est une base $(e_1, ..., e_n)$ telle que $\forall i \neq j,\ \langle e_i, e_j\rangle = 0$, $\forall i,\ \langle e_i, e_i\rangle = 1$.

Théorème. Si E est un espace euclidien, alors E admet une base orthogonale. En particulier E admet une base orthonormale.

Exercices.

1) *(Théorème de Pythagore)* Soient $x, y \in E$. Montrer que $\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

2) Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs **non nuls** de E telle que $\forall i \neq j,\ \langle e_i, e_j\rangle = 0$. Vérifier que les e_i sont linéairement indépendants.

3) Trouver une base orthonormale pour $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0\}$ avec le produit scalaire usuel.

II.2 Procédé de Gram-Schmidt

Théorème. Soit E un espace euclidien de base $(e_1, ..., e_n)$. Il existe une unique base $(f_1, ..., f_n)$ de E telle que

(i) $\forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ f_i \in e_i + \mathrm{Vect}\{e_1, ..., e_{i-1}\}$;

(ii) la base $(f_1, ..., f_n)$ est orthogonale.

Remarque. En particulier, la base $(\frac{f_1}{||f_1||}, ..., \frac{f_n}{||f_n||})$ est orthonormale.

Nous allons démontrer le théorème plus général suivant.

Théorème. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique telle que

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ \text{dét}(\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \neq 0.$$

† Alors il existe une unique base $(f_1, ..., f_n)$ de E telle que :

i) $\forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ f_k \in e_k + \mathrm{Vect}\{e_1, ..., e_{k-1}\}$.

†. Cette condition est vérifiée si φ est un produit scalaire. En effet dans ce cas, pour tout

ii) $\forall 1 \leqslant k \neq l \leqslant n,\ \varphi(f_k, f_l) = 0$.

De plus, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $\text{dét}(\varphi(e_i, e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k} = \varphi(f_1, f_1)...\varphi(f_k, f_k)$.

Démo. On pose pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $A_k = (\varphi(e_i, e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

Unicité.

Si $(f_1, ..., f_n)$ et $(f'_1, ..., f'_n)$ sont deux bases de E telles que

$$\forall 1 \leqslant k \neq l \leqslant n,\ \varphi(f_k, f_l) = \varphi(f'_k, f'_l) = 0$$

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ f_k, f'_k \in e_k + \text{Vect}\{e_1, ..., e_{k-1}\},$$

Alors $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\text{Vect}\{f_1, ..., f_k\} = \text{Vect}\{e_1, ..., e_k\} = \text{Vect}\{f'_1, ..., f'_k\}$. De plus, si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors

$$f_k - f'_k \in \text{Vect}\{e_1, ..., e_{k-1}\} = \text{Vect}\{f_1, ..., f_k\} = \text{Vect}\{f'_1, ..., f'_k\}.$$

Donc

$$f'_k = f_k + \sum_{1\leqslant j\leqslant k-1} t_j f_j$$

pour certains réels t_j. Mais alors

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant k-1,\ \varphi(f'_k, f_i) = \varphi(f_k + \sum_{1\leqslant j\leqslant k-1} t_j f_j, f_i)$$

$$= \varphi(f_k, f_i) + \sum_{1\leqslant j\leqslant k-1} t_j \varphi(f_j, f_i)$$

$$= t_i \varphi(f_i, f_i)$$

car $j \neq i \Rightarrow \varphi(f_j, f_i) = 0$.

$1 \leqslant k \leqslant n$, la matrice $A_k = (\varphi(e_i, e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ est de noyau nul car si

$$0 \neq x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \Rightarrow {}^t x A_k x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_i x_j \varphi(e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \varphi(x_i e_i, x_j e_j)$$

$$= \varphi(\sum_{i=1}^{k} x_i e_i, \sum_{j=1}^{k} x_j e_j) = \varphi(z, z) > 0$$

où $z := \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \neq 0$. Donc $\text{dét} A_k \neq 0$.

Or, d'après la dernière phrase de l'énoncé (voir ci-dessous pour la justification), $\varphi(f_i, f_i) \neq 0$ donc $t_i = 0$. D'où $f'_k = f_k$.

Existence.

On définit par récurrence la base $(f_1, ..., f_n)$. On pose $f_1 = e_1$. Alors $\varphi(f_1, f_1) = \varphi(e_1, e_1) = \text{dét}A_1 \neq 0$. On suppose que $k \geqslant 1$ et que $f_1, ..., f_k$ sont déjà définis avec les propriétés suivantes :

— $^\forall 1 \leqslant i \neq \leqslant k$, $\varphi(f_i, f_j) = 0$.

— $^\forall 1 \leqslant i \leqslant k$, $f_i \in e_i + \text{Vect}\{e_1, ..., e_{i-1}\}$.

Supposons $k < n$. On remarque que la matrice de passage P_k de la base $(e_1, ..., e_k)$ dans la base $(f_1, ..., f_k)$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. †

Donc $\text{dét}P_k = 1$. Or, d'après la formule de changement de bases pour les formes bilinéaires, on a

$$(\varphi(f_i, f_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant k} = {}^tP_k A_k P_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$$

et en appliquant le déterminant

$$\begin{aligned} \text{dét}(\varphi(f_i, f_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant k} &= \text{dét}({}^tP_k)\text{dét}A_k\text{dét}P_k \\ &= \text{dét}A_k \neq 0. \end{aligned}$$

Or la matrice $(\varphi(f_i, f_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ est diagonale donc

$$\text{dét}(\varphi(f_i, f_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant k} = \varphi(f_1, f_1)....\varphi(f_k, f_k) = \text{dét}A_k \neq 0.$$

En particulier $^\forall 1 \leqslant i \leqslant k$, $\varphi(f_i, f_i) \neq 0$. On peut donc poser

$$\begin{aligned} f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(e_{k+1}, f_i)}{\varphi(f_i, f_i)} f_i &\in e_{k+1} + \text{Vect}\{f_1, ..., f_k\} \\ &\subseteq e_{k+1} + \text{Vect}\{e_1, ..., e_k\}. \end{aligned}$$

De plus, $^\forall 1 \leqslant j \leqslant k$, $\varphi(f_{k+1}, f_j) = 0$.

En effet,

$$^\forall 1 \leqslant j \leqslant k,\ \varphi(f_{k+1}, f_j) = \varphi(e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(e_{k+1}, f_i)}{\varphi(f_i, f_i)} f_i, f_j)$$

†. En effet, les coefficients P_{kij} de la matrice P_k vérifient $f_j = \sum_{i=1}^k P_{kij} e_i$. Comme les vecteurs $e_1, ..., e_n$ forment une base et comme $f_j \in e_j + \text{Vect}\{e_1, ..., e_{j-1}\}$, on a $^\forall j$, $P_{kjj} = 1$, $^\forall i > j$, $P_{kij} = 0$.

$$= \varphi(e_{k+1}, f_j) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(e_{k+1}, f_i)}{\varphi(f_i, f_i)} \varphi(f_i, f_j)$$
$$= \varphi(e_{k+1}, f_j) - \frac{\varphi(e_{k+1}, f_j)}{\varphi(f_j, f_j)} \varphi(f_j, f_j)$$
$$= 0.$$

Cela termine la construction de la famille $(f_1, ..., f_n)$ par récurrence.

Exercices.

a) Si $e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E, alors $^\forall x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + ... + y_n e_n \in E$, $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$.

b) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 4}$ avec le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\pi f(\cos x) g(\cos x) dx$.
$f_0 = e_0 = 1$, $f_1 = e_1 - \frac{\langle e_1, f_0\rangle}{\langle f_0, f_0\rangle} f_0 = X - \frac{\int_0^\pi \cos x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X$, $f_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1 - \frac{\langle e_2, f_0\rangle}{\langle f_0, f_0\rangle} f_0 = X^2 - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx} X - \frac{\int_0^\pi \cos^2 x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X^2 - \frac{1}{2}$, $f_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle} f_2 - \frac{\langle e_3, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1 - \frac{\langle e_3, f_0\rangle}{\langle f_0, f_0\rangle} f_0 = X^3 - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x(\cos^2 x - \frac{1}{2}) dx}{\int_0^\pi (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 dx} (X^2 - \frac{1}{2}) - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx} X - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X^3 - \frac{3}{4} X$, $f_4 = e_4 - \frac{\langle e_4, f_3\rangle}{\langle f_3, f_3\rangle} f_3 - \frac{\langle e_4, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle} f_2 - \frac{\langle e_4, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1 - \frac{\langle e_4, f_0\rangle}{\langle f_0, f_0\rangle} f_0 = X^4 - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x(\cos^3 x - \frac{3}{4}\cos x) dx}{\int_0^\pi (\cos^3 x - \frac{3}{4}\cos x)^2 dt} (X^3 - \frac{3}{4} X) - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x(\cos^2 x - \frac{1}{2}) dx}{\int_0^\pi (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 dx} (X^2 - \frac{1}{2}) - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x \cos x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx} X - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X^4 - X^2 + \frac{1}{8}$

c) *Critère de Sylvester.* Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée φ_A est un produit scalaire $\Leftrightarrow$ $^\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $\Delta_i(A) = \text{dét}(A_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant i} > 0$.

Indication. Soit $A_i = (A_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant i}$. Noter $b = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt aux vecteurs $e_1, ..., e_n$ et obtenir une base $b' = (f_1, ..., f_n)$ orthogonale pour φ_A. Alors $D_i = {}^tP_i[\varphi_A]_{(e_1,...e_i)} P_i$ où P_i est la matrice de passage de la base $(e_1, ..., e_i)$ dans la base $(f_1, ..., f_i)$ qui est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et D_i est la matrice de φ_A dans la base $(f_1, ..., f_i)$ qui est diagonale car la base $(f_1, ..., f_i)$ est orthogonale. Donc $^\forall i$, $\varphi_A(f_1, f_1)...\varphi_A(f_i, f_i) = \text{dét} D_i = \Delta_i(A)$ ...

Si tous les $\Delta_i(A) > 0$, alors la forme bilinéaire φ_A est définie positive (dans la base $(f_1, ..., f_n)$, c'est facile). Si φ_A est définie positive, alors pour tout i, $\Delta_i(A) = \varphi_A(f_1, f_1)....\varphi(f_i, f_i) > 0$.

Exemple. La matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ définit un produit scalaire car $\Delta_1(A) = 2$, $\Delta_2(A) = 3$, $\Delta_3(A) = 4$, $\Delta_4(A) = 5 > 0$.

Fin du cours du 30/1