

Cours d'algèbre bilinéaire

I Formes bilinéaires

I.1 Produit scalaire usuel

C'est l'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ où si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Proposition.

- i) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto x \cdot y$ est linéaire.
- ii) $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot y$ est linéaire.
- iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y = y \cdot x$.
- iv) $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot x > 0$.

Remarque. $x \cdot y = {}^t x y$.

Notation. Si $x \in \mathbb{R}^n$, soit $\|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x}$.

Théorème de Cauchy-Schwarz. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x \cdot y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$.

Démo.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 &\geq 0 \Leftrightarrow \sum_i \sum_j (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i y_i x_j y_j) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\sum_i x_i^2)(\sum_j y_j^2) + (\sum_j x_j^2)(\sum_i y_i^2) - 2(\sum_i x_i y_i)(\sum_j x_j y_j) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 \geq 2(x \cdot y)^2 \\ &\Leftrightarrow \|x\|_2 \|y\|_2 \geq |x \cdot y|. \end{aligned}$$

I.2 Formes bilinéaires

Définitions. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

- Une forme *bilinéaire* sur E est une application $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que
 - $\forall x \in E$, $b(x, \cdot) : E \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire ;
 - $\forall y \in E$, $b(\cdot, y) : E \rightarrow \mathbb{R}$ aussi.
- On dit que b est *symétrique* si $\forall x, y \in E$, $b(x, y) = b(y, x)$.

- On dit que b est *antisymétrique* si $\forall x, y \in E$, $b(x, y) = -b(y, x)$.
- On dit que b est *alternée* si $\forall x \in E$, $b(x, x) = 0$.

Notations. Soient $Bil(E)$, resp. $Bil_S(E)$, resp. $Bil_A(E)$, l'ensemble des formes bilinéaires sur E , resp. des formes bilinéaires symétriques, resp. l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques.

Exercices.

- 1) L'ensemble $Bil(E)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel pour les lois ordinaires et $Bil(E) = Bil_S(E) \oplus Bil_A(E)$.
- 2) *Polarisation.*
 - i) Soit $b \in Bil_S(E)$. Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $b(x, y) = \frac{1}{2}(b(x + y, x + y) - b(x, x) - b(y, y))$.
 - ii) Soit $b \in Bil(E)$. Alors b antisymétrique \Leftrightarrow b alternée.

Exemples.

- a) Les applications suivantes sont bilinéaires symétriques.
 - $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$;
 - $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \text{Tr}AB$;
 - $l_2(\mathbb{N}) \times l_2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, $((a_n), (b_n)) \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n b_n$ †;
 - $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 fg$.
- b) L'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$ est bilinéaire antisymétrique.
- c) L'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2$ est bilinéaire mais ni symétrique ni antisymétrique.

I.3 Matrices

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application

$$\varphi_A : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto {}^t X A Y$$

est bilinéaire.

Exercice. L'application φ_A est symétrique \Leftrightarrow la matrice A est symétrique. L'application φ_A est antisymétrique \Leftrightarrow la matrice A est antisymétrique.

†. $l_2(\mathbb{N}) = \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_n a_n^2 < \infty\}$

Notations. Soient $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^t A = A\}$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^t A = -A\}$.

Définition. Matrice d'une forme bilinéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E . Si $\varphi \in Bil(E)$, on pose $[\varphi]_{\mathcal{B}} = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Proposition. Avec les notations de la définition.

$$\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \forall y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n, \varphi(x, y) = {}^t X A Y$$

où $A = [\varphi]_{\mathcal{B}}$, $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$, $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

On en déduit le

Théorème. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , de base \mathcal{B} . Alors l'application $\varphi \mapsto [\varphi]_{\mathcal{B}}$ définit des isomorphismes d'espaces vectoriels :

$$Bil(E) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$Bil_S(E) \simeq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$$Bil_A(E) \simeq \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) .$$

Exemples.

- a) Soit $E = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Soit $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Soit $\mathcal{B}' = (1, 2x - 1, 6x - 6x + 1)$. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Alors

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, [\varphi]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} .$$

- b) (*non donné cette année*) Soit $E = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Soit $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Soit $\mathcal{B}' = (1, x, 2x^2 - 1)$. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi f(\cos t)g(\cos t)dt$. Alors

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{3\pi}{8} \end{pmatrix}, [\varphi]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} .$$

I.4 Formules de changement de bases et congruence des matrices

Proposition. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E . Soit $\varphi \in Bil(E)$. Si $A = [\varphi]_{\mathcal{B}}$, $A' = [\varphi]_{\mathcal{B}'}$, $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{\dagger}$, alors

$$A' = {}^t P A P .$$

Définition. On dit que $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont congruentes si $A' = {}^t P A P$ pour une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

Théorème. Classes de congruences des matrices symétriques et anti-symétriques réelles.

- i) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe des entiers $r, s \geq 0$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

matrice diagonale avec $r \ll 1 \gg$ et $s \ll -1 \gg$. De plus, $r + s = \text{rg } A$.

- ii) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $\text{rg } A = 2d$ est pair et il existe une matrice inversible P

[†]. c-à-d si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$, alors $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $\forall 1 \leq j \leq n, e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$; c'est la matrice de passage de la base \mathcal{B} dans la base \mathcal{B}' .

telle que

$${}^t PAP = \begin{pmatrix} J & & & \\ & \ddots & & \\ & & J & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

matrice diagonale par blocs avec d blocs $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de taille 2×2 .

Démo. Plus tard dans le cours.

I.5 Produits scalaires

Définitions. Soit $\varphi \in \text{Bil}_S(E)$.

- On dit que φ est *positive* si $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$.
- On dit que φ est *négative* si $\forall x \in E, \varphi(x, x) \leq 0$.
- On dit que φ est *définie positive* si $\forall 0 \neq x \in E, \varphi(x, x) > 0$.
- On dit que φ est *définie négative* si $\forall 0 \neq x \in E, \varphi(x, x) < 0$.

Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique et définie positive $\varphi \in \text{Bil}(E)$.

Exemple. Le produit scalaire usuel est un produit scalaire.

Exercices.

- 1) $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- 2) $(A, B) \mapsto -\text{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

fin du cours du 23 janvier