

Définitions. Affinement indépendants. On dit que $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{E}$ sont \mathbb{R} -*affinement indépendants* si les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_N}$ sont \mathbb{R} -linéairement indépendants.

Repère. Un repère de \mathcal{E} est la donnée d'un point $O \in \mathcal{E}$ et d'une base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ de $\vec{\mathcal{E}}$.

Remarque. Dans ce cas, $\forall x \in \mathcal{E}, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x = O + x_1\vec{u}_1 + \dots + x_n\vec{u}_n$.

Exercice. À l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_N}$ sont \mathbb{R} -linéairement indépendants $\Leftrightarrow \forall i, \overrightarrow{A_iA_j}, 1 \leq j \neq i \leq N$ sont aussi \mathbb{R} -linéairement indépendants.

VI.4 Isométries affines

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien, *c-à-d* $\vec{\mathcal{E}}$ est un espace euclidien.

Théorème. Soit $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application telle que

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \|\overrightarrow{T(M)T(N)}\| = \|MN\| .$$

Alors T est une transformation affine bijective.

On dit que T est une *isométrie affine*.

Démo. Il suffit de démontrer que T est affine car alors $\vec{T} \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ est inversible et donc T est bijective (*exo*).

Supposons que $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel. On a $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n, 0 < \lambda < 1$. Soit $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Alors

$$\|z - x\| = (1 - \lambda)\|x - y\| \Rightarrow \|T(z) - T(x)\| = (1 - \lambda)\|T(x) - T(y)\|$$

$$\|z - y\| = \lambda\|x - y\| \Rightarrow \|T(z) - T(y)\| = \lambda\|T(x) - T(y)\|$$

$$\Rightarrow \|T(x) - T(y)\| = \|T(x) - T(z)\| + \|T(z) - T(y)\|$$

$$\Rightarrow \exists s > 0, T(z) - T(y) = s(T(x) - T(z)) .$$

Mais alors

$$T(z) = sT(x) + (1 - s)T(y) \Rightarrow \|T(z) - T(y)\| = s\|T(x) - T(y)\| = \lambda\|T(x) - T(y)\|$$

$$\Rightarrow s = \lambda$$

d'où $T(z) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$

Q.e.d.

Définition. Un *déplacement* est une isométrie f tel que $\det \vec{f} = 1$; un *antidéplacement* est une isométrie f tel que $\det \vec{f} = -1$.

VI.5 Isométries affines de \mathbb{R}^2

Exemples.

- a) Les translations.
 b) La rotation de centre $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, R_{y,\theta} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

- c) La symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta_{y,\theta} \subseteq \mathbb{R}^2$ qui passe par $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et qui fait un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses :

$\forall M, S_{y,\theta}(M) = M'$ tel que $\Delta_{y,\theta}$ est la *médiatrice* de $[M, M']^\dagger$.

C-à-d :

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, S_{y,\theta} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une isométrie ALORS

- f est une translation : $f = t_{\vec{u}}$ pour un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$;
- ou f est une rotation : $f = r_{A,\theta}$ pour un point $A \in \mathbb{R}^2$ et un angle $\theta \in \mathbb{R}$;
- ou f est une *réflexion glissée* : $f = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$ pour une droite affine $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ et un vecteur $\vec{u} \in \vec{\Delta}$.

Exercice. Trouver le centre de la rotation

$$(x, y) \mapsto \left(-\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} + 1 \right).$$

Lemme.

Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une isométrie d'un espace affine euclidien.

Alors il existe un unique $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - 1)$ et une unique isométrie affine $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ avec un point fixe tels que :

$$f = t_{\vec{u}} \circ g.$$

\dagger . c-à-d $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|Mx\| = \|M'x\|\}$

Démo. Unicité. $\ker(\vec{f} - 1) \oplus^\perp \text{Im}(\vec{f} - 1) = \vec{E}^\ddagger$. Si

$$f = \overset{t}{\vec{u}} \circ g = \overset{t}{\vec{v}} \circ h,$$

avec g, h isométries affines avec points fixes : O et O' , avec $\vec{u}, \vec{v} \in \ker \vec{f} - 1$, alors :

$$\begin{aligned} O + \vec{u} = O' + \vec{f}(\vec{O}'\vec{O}) + \vec{v} &\Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = (1 - \vec{f})(\vec{O}'\vec{O}) \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in \ker(\vec{f} - 1) \cap \text{Im}(\vec{f} - 1) = 0 \\ &\Rightarrow \vec{u} = \vec{v} \Rightarrow g = h. \end{aligned}$$

Existence. Supposons $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$. Alors d'après le lemme, pour un certain $u_1 \in \ker(\vec{f} - 1)$ et un $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = f(0) + \vec{f}(x) = u_1 + (1 - \vec{f})(y) + \vec{f}(x)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = u_1 + \underbrace{y + \vec{f}(x - y)}_{=:g(x)}$.

	Isométrie affine $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	Points fixes de T
	Identité	\mathbb{R}^2
	Translation $t_{\vec{u}}$ où $\vec{u} \neq \vec{0}$	\emptyset
En résumé :	Rotation de centre A et d'angle $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$	A
	Symétrie orthogonale s_Δ où $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ [†]	Δ
	Symétrie glissée $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$ où $\vec{0} \neq \vec{u} \in \vec{\Delta}$	\emptyset

VI.6 Isométries affines de \mathbb{R}^3

Non fait en cours Exemples.

- La rotation $R_{A, \vec{k}, \theta}(M) = A + R_{\vec{k}, \theta}(\vec{AM})$ d'angle θ et d'axe $A + \mathbb{R}\vec{k}$ où $\|\vec{k}\| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^3$.[‡]
- La réflexion orthogonale de plan $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^3$ définie par $r_{\mathcal{P}}(M) = M'$ où \mathcal{P} est le plan médiateur de $[MM']$ [§]

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une isométrie. ALORS

- f est une translation : $f = t_{\vec{u}}$ pour un $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$;
- ou f est un *vissage* : $f = t_{\vec{u}} \circ R_{A, \vec{k}, \theta}$ où $A \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{k}\| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in \mathbb{R}\vec{k}$;

[‡]. En effet, si $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}}$ est tel que $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$, si $\vec{y} \in \vec{\mathcal{E}}$, alors $\langle \vec{x}, \vec{f}(\vec{y}) - \vec{y} \rangle = \langle \vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y}) - \vec{y} \rangle = \langle \vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y}) \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. Donc $\ker(\vec{f} - 1) + \text{Im}(\vec{f} - 1) = \ker(\vec{f} - 1) \oplus^\perp \text{Im}(\vec{f} - 1)$ et par le théorème du rang, $\dim = \ker(\vec{f} - 1) \oplus^\perp \text{Im}(\vec{f} - 1) = \dim \mathcal{E}$.

[‡]. et $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{R}_{\vec{k}, \theta}(\vec{v}) = \cos \theta \vec{v} + \sin \theta \vec{k} \wedge \vec{v} + (1 - \cos \theta)(\vec{k} \cdot \vec{v}) \vec{k}$.

[§]. c -à-d $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|Mx\| = \|M'x\|\}$.

- ou f est une *antirotation* $f = S_{\mathcal{P}} \circ R$ où $S_{\mathcal{P}}$ est une réflexion orthogonale par rapport au plan \mathcal{P} , R est une rotation d'axe D avec $D \perp \mathcal{P}$;
- ou f est une *réflexion glissée* : $f = t_{\vec{u}} \circ S_{\mathcal{P}}$ où $S_{\mathcal{P}}$ est une réflexion orthogonale par rapport au plan \mathcal{P} avec $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$.

Corollaire. Un déplacement de \mathbb{R}^3 avec un point fixe est une rotation. (*Euler*)

Exemple. Soit $f(x, y, z) = (-y + 1, x + 1, z + 1)$. Alors f est un vissage : $f = t_{\vec{e}_3} \circ R_{A, \vec{e}_3, -\frac{\pi}{2}}$ avec $A = (0, 1, 0)$.

VII Coniques

VII.1 Définitions

On appelle *conique* un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 de la forme :

$$\mathcal{C}_F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$$

où $F(x, y) = \underbrace{ax^2 + bxy + cy^2}_{q_F(x, y)} + dx + ey + f$ pour certaines constantes $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Exemples : les cercles, les ellipses, les hyperboles, les paraboles.

On définit *l'homogénéisé* de F par :

$$H_F(x, y, z) := ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = z^2 F\left(\frac{1}{z}(x, y)\right).$$

Si une conique \mathcal{C} peut être définie par une fonction $F = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ telle que la matrice

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

est inversible, alors on dit que \mathcal{C} est une *conique non dégénérée*.

Remarque. La matrice $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$ est la matrice de la forme quadratique H_F dans la base canonique.

Exemple. La conique d'équation $x^2 - y = 0$ dans \mathbb{R}^2 est non dégénérée car si on pose $F(x, y) := x^2 - y$, alors $H_F(x, y, z) = x^2 - yz$ et la matrice associée est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ qui est inversible.

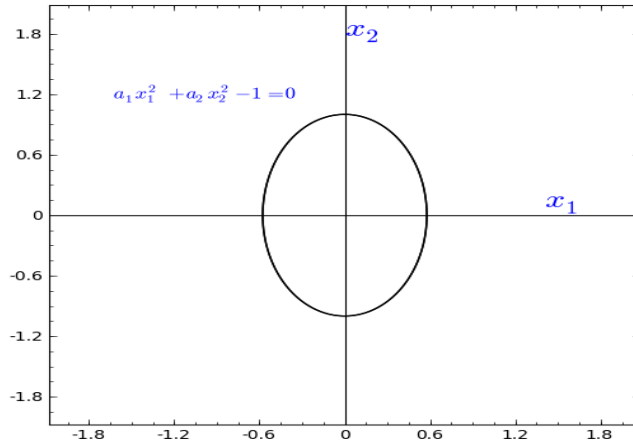


FIGURE 2 – ellipse

Remarque. Une conique, même non dégénérée, peut-être vide : $x^2 + y^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R}^2 .

VII.2 Forme réduite des coniques non dégénérées

Exemples de coniques non dégénérées

- l'ellipse d'équation $F(x_1, x_2) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - 1$ où $a_1, a_2 > 0$,
- l'hyperbole d'équation $F(x_1, x_2) = a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - 1$ où $a_1, a_2 > 0$,
- la parabole d'équation $F(x_1, x_2) = a_1x_1^2 - x_2$ où $a_1 > 0$

sont des coniques non dégénérées (on a $H_F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - x_3^2$ de signature $(2, 1)$ dans le premier cas, $H_F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - x_3^2$ de signature $(1, 2)$ dans le deuxième cas et $H_F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 - x_2x_3$, de signature $(2, 1)$, dans le dernier cas). Nous allons voir qu'à changement de repère orthonormal près ce sont les seules.

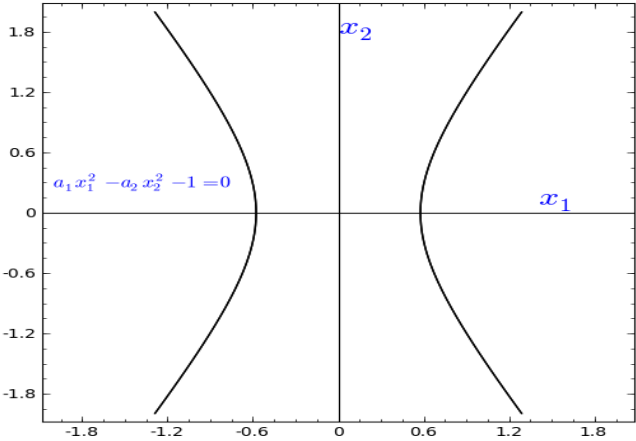


FIGURE 3 – hyperbole

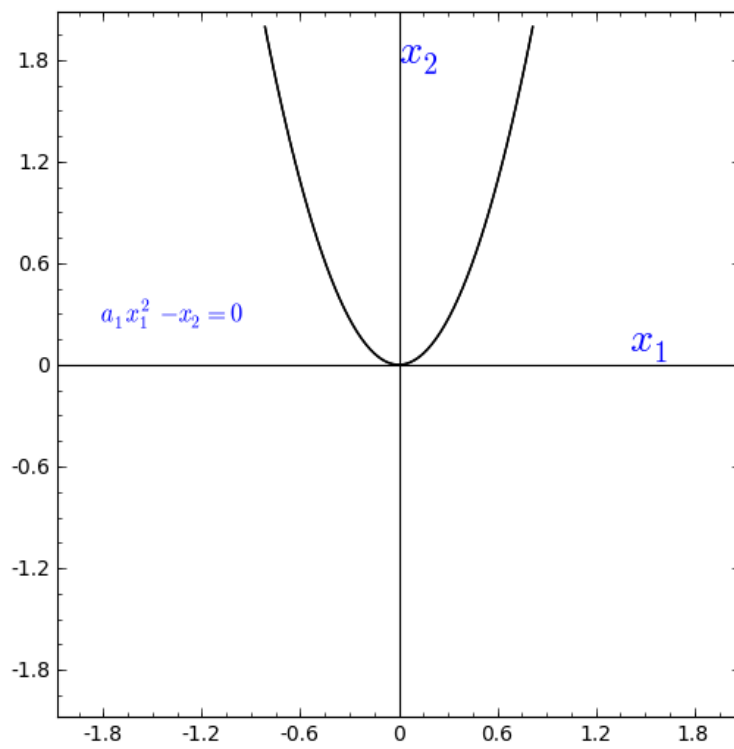


FIGURE 4 – parabole

Théorème VII.1 Soit \mathcal{C} une conique dans \mathbb{R}^2 d'équation :

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 .$$

On suppose que la matrice $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$ est inversible.

Alors

- ou bien \mathcal{C} est vide.
- ou bien il existe $\mathfrak{o} \in \mathbb{R}^2$, une base orthonormée u_1, u_2 de \mathbb{R}^2 et $a_1, a_2 > 0$ tels que :

$$(I) \quad \mathfrak{o} + x_1 u_1 + x_2 u_2 \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1$$

- ou bien il existe il existe $\mathfrak{o} \in \mathbb{R}^2$, une base orthonormée u_1, u_2 de \mathbb{R}^2 et $a_1, a_2 > 0$ tels que :

$$(II) \quad \mathfrak{o} + x_1 u_1 + x_2 u_2 \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1$$

- ou bien il existe il existe $\mathfrak{o} \in \mathbb{R}^2$, une base orthonormée u_1, u_2 de \mathbb{R}^2 et $a_1, a_2 > 0$ tels que :

$$(III) \quad \mathfrak{o} + x_1 u_1 + x_2 u_2 \in \mathcal{C} \Leftrightarrow a_1 x_1^2 - x_2 = 0.$$

On dit que les équations à droite du signe \Leftrightarrow sont les équations réduites de la conique \mathcal{C} .

FIN DU COURS

Ce qui suit n'a pas été fait en cours.

On dit que les droites $\mathbb{R}u_1$ et $\mathbb{R}u_2$ sont des *directions principales* de \mathcal{C} . Ces directions sont uniques si \mathcal{C} n'est pas un cercle (*i.e.* $a_1 \neq a_2$), ce sont les droites propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$.

Dans les cas (I) et (II), on dit que \mathfrak{o} est le centre de la conique et on appelle les droites $\mathfrak{o} + \mathbb{R}u_i$ des (les (si $a_1 \neq a_2$)) *axes principaux* de \mathcal{C} .

Démo.

Posons $q_F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, $l(x, y) = dx + ey$. Soit u_1, u_2 une base orthonormale de vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 .

On a alors : $q_F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

On a donc, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(x_1u_1 + x_2u_2) &= \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + l(x_1u_1 + x_2u_2) + f \\ &= \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + f \end{aligned}$$

avec $\alpha_i = l(u_i)$.

Remarque. Si $(\mathfrak{o}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est un repère du plan affine \mathbb{R}^2 , si $F_1(x_1, x_2) := F(\mathfrak{o} + x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2)$, alors

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, H_{F_1}(x_1, x_2, x_3) = H_F(x_1(\vec{u}_1, 0) + x_2(\vec{u}_2, 0) + x_3(o, 1)) .$$

Si $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, on a :

$$F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1\left(x_1 + \frac{\alpha_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(x_2 + \frac{\alpha_2}{2\lambda_2}\right)^2 + c'$$

pour une certaine constante c' . Si on pose $\mathfrak{o} := -\frac{\alpha_1}{2\lambda_1}u_1 - \frac{\alpha_2}{2\lambda_2}u_2$, on trouve :

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{o} + x_1u_1 + x_2u_2) &= F\left(\left(x_1 - \frac{\alpha_1}{2\lambda_1}\right)u_1 + \left(x_2 - \frac{\alpha_2}{2\lambda_2}\right)u_2\right) \\ &= \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + c' \end{aligned}$$

si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. En particulier, $c' = F(\mathfrak{o})$.

Or, si $G(x_1, x_2) := F(\mathfrak{o} + x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + c'$, on a :

$$H_G(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + c'x_3^2 .$$

Comme $H_G(x_1, x_2, x_3) = H_F(x_1(u_1, 0) + x_2(u_2, 0) + x_3(o, 1))$, H_G est non dégénérée et donc $c' = F(\mathfrak{o}) \neq 0$.

Donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{o} + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + F(\mathfrak{o}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})}x_1^2 + \frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{o})}x_2^2 = 1 \quad (*) . \end{aligned}$$

Si $\frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})}, \frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{o})} > 0$, on pose $a_i = \frac{-\lambda_i}{F(\mathfrak{o})}$. Si $\frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})} > 0, \frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{o})} < 0$, on pose $a_1 := \frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})}$ et $a_2 := \frac{\lambda_2}{F(\mathfrak{o})} > 0$. Si $\frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})} < 0, \frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{o})} > 0$, on échange u_1 et u_2 et on est ramené

au cas précédent. Enfin si $\frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{O})}, \frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{O})} < 0$, l'équation (*) n'a pas de solution donc $\mathcal{C} = \emptyset$.

Remarque. Comment trouver \mathfrak{O} ?

Réponse. Le point \mathfrak{O} est l'unique point de \mathbb{R}^2 qui vérifie le système :

$$\begin{cases} \partial F_x(\mathfrak{O}) = 0 \\ \partial F_y(\mathfrak{O}) = 0 \end{cases} .$$

En effet, d'après la formule de Taylor, on a :

$$F(\mathfrak{O} + v) = q_F(v) + \left\langle \begin{pmatrix} \partial F_x(\mathfrak{O}) \\ \partial F_y(\mathfrak{O}) \end{pmatrix}, v \right\rangle + F(\mathfrak{O})$$

pour tout vecteur v de \mathbb{R}^2 . Donc le point \mathfrak{O} vérifie :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \partial F_x(\mathfrak{O}) \\ \partial F_y(\mathfrak{O}) \end{pmatrix}, x_1 u_1 + x_2 u_2 \right\rangle = 0$$

pour tous $x_1 u_1 + x_2 u_2 \in \mathbb{R}^2$ donc :

$$\begin{cases} \partial F_x(\mathfrak{O}) = 0 \\ \partial F_y(\mathfrak{O}) = 0 \end{cases} .$$

De plus, on peut vérifier que ce système a une seule solution.

Si $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = 0$:

Soit (u_1, u_2) une base de vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, 0$.

Comme précédemment, on a :

$$F(x_1 u_1 + x_2 u_2) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + f$$

pour certaines constantes réelles α_1, α_2 . Comme $\lambda_1 \neq 0$, on a :

$$F(x_1 u_1 + x_2 u_2) = \lambda_1 \left(x_1 + \frac{\alpha_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \alpha_2 x_2 + c'$$

pour une certaine constante c' .

On pose $\mathfrak{O}' := -\frac{\alpha_1}{2\lambda_1} u_1$ et on trouve

$$G(x_1, x_2) := F(\mathfrak{O}' + x_1 u_1 + x_2 u_2) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2 + c' .$$

Or, H_F est non dégénérée donc H_G aussi. Mais :

$$H_G(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2 x_3 + c' x_3^2$$

qui est une forme quadratique de matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{2} \\ 0 & \frac{\alpha_2}{2} & c' \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Cette matrice doit être inversible donc $\alpha_2 \neq 0$.

On pose alors :

$$\mathfrak{O} := -\frac{\alpha_1}{2\lambda_1}u_1 - \frac{c'}{\alpha_2}u_2 .$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{O} + x_1u_1 + x_2u_2) &= F\left(\left(x_1 - \frac{\alpha_1}{2\lambda_1}\right)u_1 + \left(x_2 - \frac{c'}{\alpha_2}\right)u_2\right) \\ &= \lambda_1x_1^2 + \alpha_2x_2 . \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{O} + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow F(\mathfrak{O} + x_1u_1 + x_2u_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1x_1^2 + \alpha_2x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-\lambda_1}{\alpha_2}x_1^2 - x_2 = 0 . \end{aligned}$$

Quitte à changer u_2 en $-u_2$, on supposera que $\frac{-\lambda_1}{\alpha_2} > 0$. On pose alors $a_1 := \frac{-\lambda_1}{\alpha_2}$.

Remarque. Comment calculer \mathfrak{O} dans ce cas ?

Réponse. le point \mathfrak{O} est l'unique point de \mathbb{R}^2 tel que :

$$F(\mathfrak{O}) = 0 \text{ et } \left\langle \begin{pmatrix} \partial F_x(\mathfrak{O}) \\ \partial F_y(\mathfrak{O}) \end{pmatrix}, u_1 \right\rangle = 0$$

(exo).

De plus, pour ce point $\mathfrak{O} \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$F(\mathfrak{O} + x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1x_1^2 + \alpha_2x_2$$

où $\alpha_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \partial F_x(\mathfrak{O}) \\ \partial F_y(\mathfrak{O}) \end{pmatrix}, u_2 \right\rangle$.

Pour résumer, on a le tableau suivant pour une conique non dégénérée d'équation $F(x, y) = 0$ dans \mathbb{R}^2 :

$\text{sign}(q_F)$	nature de la conique
$(2, 0)$	ellipse \emptyset si $\text{sign}(H_F)=(2,1)$, si $\text{sign}(H_F)=(3,0)$
$(1, 1)$	hyperbole
$(1, 0)$	parabole

Exemple. On considère la conique \mathcal{C} d'équation :

$$x^2 + xy + y^2 + 4x + 3y + 4 = 0 .$$

Pour trouver $\mathfrak{O} = (x_0, y_0)$, on résout le système :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \partial_x F(\mathfrak{O}) = 0 \\ \partial_y F(\mathfrak{O}) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + y_0 + 4 = 0 \\ x_0 + 2y_0 + 3 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow x_0 = -\frac{5}{3}, y_0 = -\frac{2}{3} . \end{aligned}$$

On a de plus, $q_F(x, y) = x^2 + xy + y^2$. On cherche donc les valeurs propres λ_1, λ_2 de la matrice

$$[q_F] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

On trouve : $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. Si (u_1, u_2) est une base orthonormale de vecteurs propres associés à λ_1, λ_2 , alors on trouve :

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{O} + x_1 u_1 + x_2 u_2) &= F(\mathfrak{O}) + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} x_2^2 . \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{O} + x_1 u_1 + x_2 u_2 \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} x_2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2} x_1^2 + \frac{9}{2} x_2^2 = 1 . \end{aligned}$$

Donc \mathcal{C} est une ellipse de centre $(-5/3, -2/3)$ et dont les axes principaux sont les droites

$$\mathfrak{O} + \mathbb{R}u_1 = (y = -x - 7/3)$$

$$\mathfrak{O} + \mathbb{R}u_2 = (y = x + 1)$$

