

*Exercices (suite)*

- 3) Trouver l'équation de la droite qui passe par les points  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  du plan affine  $\mathbb{R}^2$ .
- 4) Trouver les équations de la droite qui passe par les points  $A = (x_A, y_A, z_A)$ ,  $B = (x_B, y_B, z_B)$  de l'espace affine  $\mathbb{R}^3$ .

*Remarquer que le système*

$$\begin{cases} (y - y_A)(z_B - z_A) - (z - z_A)(y_B - y_A) = 0 \\ (z - z_A)(x_B - x_A) - (x - x_A)(z_B - z_A) = 0 \\ (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0 \end{cases}$$

*est de rang 2.*

- 5) Soient  $d_i = (a_i x + b_i y + c_i = 0)$ ,  $i = 1, 2, 3$  trois droites du plan affine  $\mathbb{R}^2$  avec  $\forall i = 1, 2, 3, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, (a_i, b_i) \neq (0, 0)$ . Montrer que  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow d_1, d_2, d_3$  sont concourantes ou  $d_1 // d_2 // d_3$ .

**Définition.** On dira qu'une application  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est affine s'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  et  $\vec{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ , tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, T(x) = T(x_0) + \vec{T}(x - x_0).$$

Dans ce cas  $\vec{T}$  est unique, c'est la partie linéaire de  $T$ .

*Exercice.* L'application  $T$  est affine  $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^m, T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y) \Leftrightarrow \forall 0 < \lambda < 1 \forall x, y \in \mathbb{R}^m, T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$ .

*Indications.* Si  $\lambda > 1$ , alors  $0 < \frac{1}{\lambda} < 1$  et

$$x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x + (1 - \lambda)y) + (1 - \frac{1}{\lambda})y.$$

Si  $\lambda < 0$ , alors  $0 < \frac{1}{1 - \lambda} < 1$  et

$$y = \frac{1}{1 - \lambda}(\lambda x + (1 - \lambda)y) + (1 - \frac{1}{1 - \lambda})x.$$

## VI.2 Espaces affines

**Définition.** Un espace affine réel est un ensemble  $\mathcal{E}$  avec une action simplement transitive d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  c-à-d une application

$$E \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

telle que

- (i)  $\forall x \in \mathcal{E}, x + \vec{0} = x$ .  
(ii)  $\forall x \in \mathcal{E}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, (x + \vec{u}) + \vec{v} = x + (\vec{u} + \vec{v})$ .  
(iii)  $\forall x, y \in \mathcal{E}, \exists ! \vec{u} \in E, x + \vec{u} = y$ .

La *dimension* de  $\mathcal{E}$  est  $\dim \mathcal{E} = \dim E$ .

**Notation.** Si  $x + \vec{u} = y$ , on note  $\overrightarrow{xy} := \vec{u}$ . On note parfois  $E = \vec{\mathcal{E}}$ .

**Relation de Chasles.**  $\forall x, y, z \in \mathcal{E}, \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ .

*Exemple.*  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$  avec  $\vec{\mathcal{E}} = \mathbb{R}^n$  et l'addition usuelle.

**Définition équivalente.** Un ensemble  $\mathcal{E}$  est un  $\mathbb{R}$ –espace affine s'il existe un  $\mathbb{R}$ –espace vectoriel  $E$  et une application

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E, (x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$$

telle que :

$$\forall x \in \mathcal{E}, \forall \vec{u} \in E, \exists ! y \in \mathcal{E}, \overrightarrow{xy} = \vec{u} \text{ et } \forall x, y, z \in \mathcal{E}, \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}.$$

**Définition. Sous-espaces affines.** Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathbb{R}$ –espace affine. Un sous-ensemble  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$  est un *sous-espace affine* si  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  ou  $\exists x \in \mathcal{F}, F \leq \vec{\mathcal{E}}, \mathcal{F} = x + F$ .  
( $\Leftrightarrow \{\overrightarrow{ab} : a, b \in \mathcal{F}\} \leq \vec{\mathcal{E}}$ ).

**Sous-espaces engendrés.** Soit  $\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{E}$ . Soit  $x_0 \in X$ . On note  $\text{Aff}(X) = x_0 + \text{Vect}\{\overrightarrow{x_0x} : x \in X\}$ . C'est le plus petit sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  contenant  $X$ . Et c'est indépendant du choix de  $x_0 \in X$ .

**Barycentres.**

Si  $x, y \in \mathcal{E}$ , espace affine, alors si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , l'application

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, M \mapsto M + \lambda \overrightarrow{Mx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{My}$$

est constante. On note  $P = \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{E}$  le point tel que :

$$\forall M \in \mathcal{E}, M + \lambda \overrightarrow{Mx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{My} = P.$$

En effet, si  $M, N \in \mathcal{E}$ , alors :

$$\begin{aligned} \lambda \overrightarrow{Nx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{Ny} &= \lambda \overrightarrow{NM} + \lambda \overrightarrow{Mx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{NM} + (1 - \lambda) \overrightarrow{My} \\ &= \overrightarrow{NM} + \lambda \overrightarrow{Mx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{My} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} N + \lambda \overrightarrow{Nx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{Ny} &= N + \overrightarrow{NM} + \lambda \overrightarrow{Mx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{My} \\ &= M + \lambda \overrightarrow{Mx} + (1 - \lambda) \overrightarrow{My}. \end{aligned}$$

### VI.3 Transformations affines

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine réel. On notera  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel associé.

**Proposition-définition.** Soit  $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une application. Sont équivalentes :

- (i) Il existe  $A \in \mathcal{E}$  et  $\overrightarrow{T} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\overrightarrow{\mathcal{E}})$  tels que

$$\forall M \in \mathcal{E}, T(M) = T(A) + \overrightarrow{T}(\overrightarrow{AM}) .$$

- (ii) Il existe  $\overrightarrow{T} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\overrightarrow{\mathcal{E}})$  telle que

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \overrightarrow{T(M)T(N)} = \overrightarrow{T}(\overrightarrow{MN}) .$$

Si l'une de ces conditions est vérifiée, on dit que  $T$  est une *transformation affine*.

*Exemples.* Les translations  $t_{\overrightarrow{u}} : x \mapsto x + \overrightarrow{u}$ , les homothéties  $h_{A,\lambda} : x \mapsto A + \lambda\overrightarrow{Ax}$ ,  $A \in \mathcal{E}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  sont des applications affines et  $\overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}}} = Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$ , respectivement,  $\overrightarrow{h_{A,\lambda}} = \lambda Id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$ .

**Propriétés.**

- Si  $S, T$  sont des transformations affines, alors  $S \circ T$  aussi et  $\overrightarrow{S \circ T} = \overrightarrow{S} \overrightarrow{T}$ .
- Si  $T$  est une transformation affine bijective, alors sa réciproque  $T^{-1}$  aussi.
- $\forall T$  transformation affine,  $\forall O \in \mathcal{E}$ ,  $\exists ! \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ ,  $\exists ! T'$  transformation affine,  $T'(O) = O$  et  $T = t_{\overrightarrow{u}} \circ T'$ .

**Définition.** Le *groupe affine* de  $\mathcal{E}$ , noté  $GA(\mathcal{E})$ , est le groupe des bijections affines  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ .

*Exercice.* Vérifier que  $GA(\mathbb{R}) = \{x \mapsto ax + b : a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$ .

*Fin du cours du 10 avril*