V.4 Les formes bilinéaires antisymétriques

Définition. Soit E un $K-$espace vectoriel. On dit que $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une *forme bilinéaire antisymétrique* si $^\forall x, y \in E$, $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$.

Si K est de caractéristique $\neq 2$, alors $^\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = 0$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On note $[\varphi]_{\mathcal{B}} = (\varphi(e_i, e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque. Si $A = [\varphi]_{\mathcal{B}}$, si $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, $y = y_1e_1 + ... + y_ne_n \in E$, alors $\varphi(x, y) = {}^txAy$ où $x = {}^t(x_1, ..., x_n)$, $y = {}^t(y_1, ..., y_n)$.

Formule de changement de bases.

Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Soient $A = [\varphi]_{\mathcal{B}}$, $A' = [\varphi]_{\mathcal{B}'}$. Alors

$$A' = {}^tPAP.$$

Exemple. Soit $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$. Soit $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$, $\mathcal{B}' = ((1, -1), (1, 1))$. Alors dans ce cas, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

V.4.1 le rang

Soit $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier.

Théorème. Soit $A \in \mathscr{A}_n(K)$. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que

$${}^tPAP = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \cdots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} & \\ \hline & 0 \end{array}\right)$$

avec r blocs $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ où $2r = \mathrm{rg}A$.

Démo. Si $n = 2$. On a

$$^\forall m \neq 0, \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Si $n > 2$ et si $A \neq 0$, il existe des vecteurs $v_1, v_2 \in K^n$ tels que ${}^tv_1Av_2 \neq 0$. On peut supposer que ${}^tv_1Av_2 = 1$. Comme A est antisymétrique, $^\forall i = 1, 2$, ${}^tv_iAv_i = 0$ donc v_1, v_2 sont indépendants et $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ est de dimension 2. Posons $L : K^n \to K^2$, $v \mapsto ({}^tvAv_1, {}^tvAv_2)$. C'est une application linéaire, surjective car $L(v_1) = (0, 1)$, $L(v_2) = (-1, 0)$. Donc $\dim \ker L = n - 2$. Comme $\ker L \cap F = 0$

(car $\forall t_1, t_2 \in K,\ L(t_1v_1 + t_2v_2) = (-t_2, t_1) = 0 \Leftrightarrow t_1 = t_2 = 0$), $F \oplus \ker L = K^n$. Soit $(v_3, ..., v_n)$ une base de $\ker L$.

Soit $P_1 = (v_1|v_2|v_3|...|v_n) \in \mathrm{GL}_n(K)$ la matrice de passage de la base canonique dans la base $(v_1, ..., v_n)$. On a :

$$ {}^tP_1AP_1 = ({}^tv_iAv_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ \hline & & A_1 \end{array}\right) $$

où $A_1 \in \mathscr{A}_{n-2}(K)$.

On peut donc raisonner par récurrence ...

Exemple. ${}^tP \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right) P = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \ldots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

où $P = (\delta_{i,2j-1} + \delta_{i,2(j-n)})_{1\leqslant i,j\leqslant 2n} \in O_{2n}(\mathbb{R})$.

V.4.2 Pfaffien

Définition. Soit $A \in \mathscr{A}_{2n}(K)$ une matrice antisymétrique. Si A est inversible, il existe $P \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$ telle que

$$ {}^tPAP = J := \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right) $$

et on pose $Pf(A) = \text{dét}(P^{-1})$. Sinon, on pose $Pf(A) = 0$.

Proposition. *C'est bien défini !*

Démo. Nous le montrerons dans le cas réel seulement. Voir plus loin.

Exercices.

1) $(Pf\,A)^2 = \text{dét}A$.

2) $\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{23}a_{34}$.

Indication. Si $a_{12} \neq 0$, soient $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{23}}{a_{12}} & \frac{a_{24}}{a_{12}} \\ 0 & 1 & -\frac{a_{13}}{a_{12}} & -\frac{a_{14}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ -a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & -* & 0 \end{pmatrix} $$

où $* = a_{34} - \frac{a_{13}a_{24}}{a_{12}} + \frac{a_{23}a_{14}}{a_{12}}$.

3) $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \forall A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}),\ Pf({}^tPAP) = \text{dét}P\,Pf\,A$.

V.4.3 Le groupe symplectique $\boldsymbol{Sp_{2n}}(\mathbb{R})$ *Pas fait en cours ...*

Soit $J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right) \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.

Définition. $Sp_{2n}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tAJA = J\}$.

Théorème. $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\forall g \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{dét} g = 1$.

Démo. On vérifie que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ stable par ${}^t\cdot$ et que $g \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathrm{dét} g^2 = 1 \Rightarrow \mathrm{dét} g = \pm 1$. Soit $g \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap O_{2n}(\mathbb{R})$. Alors

$$g = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

pour certaines $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et

$${}^tgJg = J \Leftrightarrow Jg = gJ \Leftrightarrow A = D,\ B = -C \ .$$

Or

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline iI_n & -iI_n \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline iI_n & -iI_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A + iB & 0 \\ \hline O & A - iB \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{dét} g = \left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array}\right| = |\mathrm{dét}(A + iB)|^2 > 0 \Rightarrow \mathrm{dét} g = 1 \ .$$

On applique la décomposition polaire à $g \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ quelconque : $g = OS$ où $O \in O_{2n}(\mathbb{R})$, $S \in \mathscr{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})$. En particulier, $S = \sqrt{{}^tgg}$. Soit $B = {}^tgg$. Soit $P(X)$ tel que $\forall \lambda$ valeur propre de ${}^tgg$, $P(\lambda) = \sqrt{\lambda}$, $P(\lambda^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Alors $P(B) = \sqrt{B}$, $P(B^{-1}) = \sqrt{B}^{-1}$.

Comme $B \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, $JB = {}^tB^{-1}J$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ JB^n = ({}^tB^{-1})^n J$$

$$\Rightarrow JP(B) = P({}^tB^{-1})J$$

$$\Rightarrow J\sqrt{B} = \sqrt{B}^{-1} J$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{B} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})\ \text{[†]}$$

$$\Rightarrow O \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \mathrm{dét} O = 1$$

†. *Autre méthode.* $S \in \mathrm{Sp}_{2n} \Leftrightarrow SJS = J \Leftrightarrow -JSJ = S^{-1} \Leftrightarrow -JS^{-1}J = S$. Or, $-JS^{-1}J$ est symétrique définie positive (ses valeurs propres sont les inverses de celles de S) et $(-JS^{-1}J)^2 = -J(S^{-1})^2J = -J(S^2)^{-1}J = -JB^{-1}J = B$ car $B \in \mathrm{Sp}_{2n}$. Donc $-JS^{-1}J = S = \sqrt{B}$, l'unique racine carrée définie positive de B.

car O orthogonale

$$\Rightarrow \text{dét} g = \text{dét} O \text{dét} S = \text{dét} S > 0$$

car S est symétrique définie positive

$$\Rightarrow \text{dét} g = 1$$

Q.e.d.

Exercices.

1) $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.
2) Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $\left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & {}^tA \end{array}\right) \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$.
3) Si $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$.
4) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right) \in O_{2n}(\mathbb{R}) \cap Sp_{2n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A + iB \in U_n$ †.

†. On note $U_n = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{M}M = I_n\}$.

V.5 Noyau et rang d'une forme bilinéaire

Définitions. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Soit $\varphi \in Bil_S(E) \cup Bil_A(E)$.

— Le *noyau de* φ est $\ker\varphi = \{x \in E \ : \ {}^\forall y \in E,\ \varphi(x,y) = 0\}$.

— Le *rang de* φ, noté $\mathrm{rg}\varphi$, est la dimension de l'image de l'application linéaire $\gamma_\varphi : E \to E^*$, $x \mapsto \varphi(x,\cdot)$ †.

— On dit que φ est *non dégénérée* si $\ker\varphi = 0$ *(pas fait en cours ...).*

Remarque. Si E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n et de base $\mathscr{B}$, si on note $\mathscr{B}^*$ la base duale de E^*, alors $[\varphi]_{\mathscr{B}} = [\gamma_\varphi]_{\mathscr{B},\mathscr{B}^*} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème du rang pour les formes bilinéaires symétriques et antisymétriques. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $\varphi \in Bil_S(E) \cup Bil_A(E)$. Alors :

$$n = \dim\ker\varphi + \mathrm{rg}\varphi \ .$$

VI Géométrie affine

VI.1 Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$

Définition. On dit que $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine si $\mathcal{F} = \varnothing$ ou $\mathcal{F} = x + F = \{x + u \ : \ u \in F\}$ pour un certain $x \in \mathcal{F}$ et un $F \leqslant \mathbb{R}^n$.

Remarque. Dans ce cas, F est unique et $F = \{x_1 - x_2 \ : \ x_1, x_2 \in \mathcal{F}\}$. On notera $\vec{\mathcal{F}} := F$ et $\dim\mathcal{F} = \dim\vec{\mathcal{F}}$.

Un sous-espace affine non vide de dimension 0 est un point. Un sous-espace affine de dimension 1 est une *droite.*

Exercices.

1) Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine $\Leftrightarrow {}^\forall\lambda \in \mathbb{R},\ {}^\forall x, y \in \mathcal{F},\ \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{F}$.

2) Une intersection quelconque et une somme finie de sous-espaces affines sont encore affines.

Fin du cours du 3/4

†. On note $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.