Licence de mathématiques
L2, algèbre 4
examen final
mardi 12 mai 2026
durée 2H

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

Exercice 1 On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices antisymétriques réelles de taille $n \times n$.

a) Montrer que l'application $\varphi : \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto -\mathrm{Tr}(AB)$ est un produit scalaire.

L'application φ est clairement bilinéaire. $\forall A, B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A, B) = -\mathrm{Tr}(AB) = -\mathrm{Tr}(BA) = \varphi(B, A)$ donc φ est aussi symétrique. Soit $0 \neq A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $\varphi(A, A) = -\mathrm{Tr}(A^2) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2$ car A est antisymétrique. Donc $-\mathrm{Tr}(A^2) > 0$ car tous les a_{ij} sont réels et au moins un de ces termes est non nul. Donc φ est un produit scalaire.

b) Cas où $n = 3$. Donner une base de l'espace $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ et donner la matrice de φ dans cette base.

Les matrices de $\mathscr{A}_3(R)$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

Donc les matrices :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

On a :

$$\mathrm{Tr}(e_1^2) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2$$

Donc $\varphi(e_1, e_1) = 2$. De même, $\varphi(e_2, e_2) = \varphi(e_3, e_3) = 2$.

On a aussi $e_1e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_1e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

Voici la matrice de φ dans la base (e_1, e_2, e_3) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On pose $\forall f, g \in \mathcal{C}$, $\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} fg$.

a) Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.

C'est clairement bilinéaire et symétrique. Si $f \in \mathcal{C}$, alors $f^2 \geqslant 0$ donc $\langle f, f\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2 \geqslant 0$. De plus, comme f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2 = 0 \Rightarrow f = 0$. Donc $f \neq 0 \Rightarrow \langle f, f\rangle > 0$. Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

b) Soit $\mathcal{C}_1$ le sous-espace de $\mathcal{C}$ engendré par les fonctions sin et cos. Trouver une base orthonormée de $\mathcal{C}_1$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On pose $e_1 = \sin$, $e_2 = \cos$. On utilise la méthode de Gram-Schmidt. Soient $f_1 = e_1$, $f_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1 = \cos - \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt} \sin$. Or,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt = \frac{1}{4}[-\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2t)) dt = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}[\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{4}.$$

Donc $f_1 = \sin$, $f_2 = \cos - \frac{2}{\pi}\sin$. La base (f_1, f_2) est orthogonale. La base (v_1, v_2) est orthonormée où :

$$v_1 = \frac{f_1}{||f_1||} = \frac{\sin}{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} = 2\frac{\sin}{\sqrt{\pi}}$$

$$v_2 = \frac{f_2}{||f_2||}$$

or,

$$||f_2||^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \frac{2}{\pi}\sin t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + \frac{4}{\pi^2}\sin^2 t - \frac{4}{\pi}\sin t\cos t)dt$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi^2}.\frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi^2 - 4}{4\pi}.$$

Donc $v_2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi^2-4}}(\cos - \frac{2}{\pi}\sin)$.

c) Déterminer le projeté orthogonal de la fonction constante 1 sur $\mathcal{C}_1$.

Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{C}_1$ est donné par la formule :

$$p(1) = \langle 1, v_1\rangle v_1 + \langle 1, v_2\rangle v_2 = \frac{4}{\pi}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt)\sin + \frac{4\pi}{\pi^2 - 4}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \frac{2}{\pi}\sin t)dt)(\cos - \frac{2}{\pi}\sin)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sin + \frac{4\pi}{\pi^2 - 4}(1 - \frac{2}{\pi})(\cos - \frac{2}{\pi}\sin)$$

$$= 4(\sin + \frac{\cos}{\pi}).$$

d) En déduire $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - a\cos t - b\sin t)^2 dt$.

On reconnaît $d(1, \mathcal{C}_1)^2 = ||1 - p(1)||^2$.

Or, $1 - p(1) = 1 - 4(\sin + \frac{\cos}{\pi})$ et

$$||1 - p(1)||^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 4\sin t - 4\frac{\cos t}{\pi}))^2 dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 16\sin^2 t + \frac{16}{\pi^2}\cos^2 t - 8\sin t - \frac{8}{\pi}\cos t - \frac{8}{\pi}\sin t\cos t)dt$$

$$= \frac{9\pi}{2} - \frac{8}{\pi} - 8.$$

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&1&1 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses valeurs propres.

La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car symétrique. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ses valeurs propres. Comme $\dim \ker A = 4 - \operatorname{rang} A = 3$, on peut supposer $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Comme $\operatorname{Tr} A = 4 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 + \lambda_4 = \lambda_4$, on a $\lambda_4)4$

b) Trouver une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $A = PD^tP$.

On cherche une base orthonormée de $\ker A$ et $\ker(A - 4I_4)$. Comme $\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x + y + z + t = 0 \right\}$, les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est une base de $\ker A$. On applique la méthode de Gram-Schmidt à la famille (e_1, e_2, e_3). On trouve :

$$e_1' = \frac{e_1}{||e_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e'_2 = \frac{e_2 - \langle e_2, e'_1\rangle e'_1}{||e_2 - \langle e_2, e'_1\rangle e'_1||} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e'_3 = \frac{e_3 - \langle e_3, e'_1\rangle e'_1 - \langle e_3, e'_2\rangle e'_2}{||e_3 - \langle e_3, e'_1\rangle e'_1 - \langle e_3, e'_2\rangle e'_2||} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

La famille (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\ker A$. On pose $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est un vecteur propre de A pour la valeur propre 4. On pose $e'_4 = \frac{e_4}{||e_4||} = \frac{e_4}{2}$. Comme la base (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) est orthonormée, la matrice

$$P = (e'_1|e'_2|e'_3|e'_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

est orthogonale et $A = PD^tP = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est une matrice de rotation et déterminer son axe. Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. Pour le produit scalaire usuel, on a :

$$\langle C_1, C_1\rangle = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

et de même, $\langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$. On a aussi :

$$\langle C_1, C_2\rangle = \frac{2}{3}.(-\frac{1}{3}) + \frac{2}{3}.\frac{2}{3} - \frac{1}{3}.\frac{2}{3} = 0$$

$$\langle C_1, C_3\rangle = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} + \frac{2}{3}.(-\frac{1}{3}) - \frac{1}{3}.\frac{2}{3} = 0$$

$$\langle C_2, C_3\rangle = -\frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{2}{3}.(-\frac{1}{3}) + \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = 0$$

donc *les colonnes sont deux à deux orthogonales de norme* 1. Donc la matrice A est orthogonale. De plus,

$$\text{dét}A = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} + \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} - \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = 1$$

donc A est une matrice de rotation.

b) Trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une matrice orthogonale P vérifiant :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} {}^tP.$$

(On ne demande pas de calculer P)

Comme P est orthogonale, ${}^tP = P^{-1}$ et $\text{Tr}A = 1 + 2\cos\theta$.

Donc $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2 = 1 + 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$.

Donc $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. On peut choisir $\theta = \frac{\pi}{3}$.

c) En déduire A^6.

On a :

$$A^6 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^6 {}^tP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 6\theta & -\sin 6\theta \\ 0 & \sin 6\theta & \cos 6\theta \end{pmatrix} {}^tP = I_3$$

car $6\theta = 2\pi$ et $\cos(2\pi) = 1$, $\sin(2\pi) = 0$.

Exercice 5 Soient $A_1 = (1,1)$, $A_2 = (2,3)$, $A_3 = (4,5)$, $B_1 = (3,4)$, $B_2 = (\frac{5}{2},3)$, $B_3 = (\frac{3}{2},2) \in \mathbb{R}^2$.

a) Déterminer des équations pour les droites affines $d_i = (A_iB_i)$, $i = 1,2,3$.

b) Montrer que d_1, d_2, d_3 sont concourantes.

a)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

Le point $M = (x,y)$ est sur la droite (A_iB_i) si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_i & x_i' & x \\ y_i & y_i' & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

où $A_i = (x_i, y_i)$, $B_i = (x_i', y_i')$.

En particulier, $M \in (A_1B_1)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 1 & 4 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y + 1 = 0$$

De même, on trouve :

— $M \in (A_2B_2) \Leftrightarrow y = 3$.

— $M \in (A_3B_3) \Leftrightarrow 3x - \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} = 0$

On obtient donc les équations des droites suivantes :

$$d_1 : -3x + 2y + 1 = 0$$
$$d_2 : y = 3$$
$$d_3 : 3x - \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} = 0$$

b)

On a :

$M \in d_1 \cap d_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y + 1 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = 3 \end{cases}$$

De même, $M \in d_2 \cap d_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 3x - \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = 3 \end{cases}$$

Donc les droites d_1, d_2, d_3 sont concourantes en $\left(\frac{7}{3}, 3\right)$.