

Contrôle continu 1

Vendredi 6 mars 2026

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

Exercice 1. On considère

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P, Q) = \int_0^\pi P(\cos(t)) Q(\cos(t)) dt.$$

- (1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Justifier en détail pourquoi φ est défini positif.
- (2) Soient $P = aX + b, Q = cX + d \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes de degré au plus 1. Sous quelle(s) condition(s) (portant sur $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) sont-ils orthogonaux pour le produit scalaire φ ?

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme défini sur $\mathbb{R}$. Montrer l'inégalité

$$\left(\int_{-1}^1 tP(t)dt \right)^2 \leq \int_{-1}^1 P(t)^2 dt,$$

Peut-on avoir égalité ? Si oui, pour quels éléments ?

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^4 kx_k y_k$ où $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. On considère le sous-espace vectoriel $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

- (1) Construire une base orthonormée de E .
- (2) Quelle est la distance de $(1, 0, 1, -1)$ à E (pour la distance associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$) ?

Exercice 4. (a) Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E .

Montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$ en général, avec égalité si la dimension de E est finie.

(b) On considère l'espace de toutes les suites réelles $E = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ que l'on munit d'une structure d'espace vectoriel avec l'addition composante par composante

$$(a_n)_n + \lambda (b_n)_n = (a_n + \lambda b_n)_n \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et toutes suites } (a_n)_n, (b_n)_n \in E.$$

Soit F le sous-espace des suites qui s'annulent sauf pour un nombre fini de composantes et soit

$$\ell^2(\mathbb{R}) := \left\{ (a_n)_n \mid \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty \right\}.$$

1. Montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F comme sous-espace.
2. Montrer que le produit scalaire

$$\langle (a_n)_n, (b_n)_n \rangle := \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j$$

est défini sur $\ell^2(\mathbb{R})$ (mais pas sur E). Il n'est pas nécessaire de montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

3. Trouver $F^\perp$ (comme sous-espace de $\ell^2(\mathbb{R})$) et, à la suite, $(F^\perp)^\perp$.