

Contrôle continu 1

Exercice 1. On considère

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P, Q) = \int_0^\pi P(\cos(t)) Q(\cos(t)) dt.$$

- (1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Justifier en détail pourquoi φ est défini positif.

Solution : Symétrique :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P, Q) = \int_0^\pi P(\cos t) Q(\cos t) dt = \int_0^\pi Q(\cos t) P(\cos t) dt = \varphi(Q, P)$$

Bilinéaire :

Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \int_0^\pi (\lambda P_1(\cos t) + P_2(\cos t)) Q(\cos t) dt$$

Par linéarité de l'intégrale

$$= \lambda \varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$$

Donc φ est linéaire à gauche. Puisque c'est symétrique elle est linéaire à droite aussi. Donc φ est bilinéaire.

Définie-positive :

$$\varphi(P, P) = \int_0^\pi P(\cos t)^2 dt \geq 0$$

Supposons $\varphi(P, P) = 0$ alors $\int_0^\pi P(\cos t)^2 dt = 0$. La fonction $t \mapsto P(\cos t)^2$ est continue et positive. Donc elle est nulle sur $[0, \pi]$. Or $\cos t$ parcourt $[-1, 1]$ lorsque $t \in [0, \pi]$. Donc $\forall x \in [-1, 1], P(x) = 0$. Un polynôme ayant une infinité de racines est nul. Donc $P = 0$.

Conclusion : φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- (2) Soient $P = aX + b, Q = cX + d \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes de degré au plus 1. Sous quelle(s) condition(s) (portant sur $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) sont-ils orthogonaux pour le produit scalaire φ ?

Solution : Soient $P = aX + b, Q = cX + d$. Alors $P(\cos t) = a \cos t + b, Q(\cos t) = c \cos t + d$

$$\begin{aligned} \varphi(P, Q) &= \int_0^\pi (a \cos t + b)(c \cos t + d) dt \\ &= ac \int_0^\pi \cos^2 t dt + (ad + bc) \int_0^\pi \cos t dt + bd \int_0^\pi 1 dt. \end{aligned}$$

Or $\int_0^\pi \cos t dt = 0; \int_0^\pi 1 dt = \pi; \int_0^\pi \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$. Donc $0 = \varphi(P, Q) = \pi \left(\frac{ac}{2} + bd \right)$.

Ainsi $P = aX + b, Q = cX + d$ sont orthogonaux si $ac + 2bd = 0$.

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme défini sur $\mathbb{R}$. Montrer l'inégalité

$$\left(\int_{-1}^1 t P(t) dt \right)^2 \leq \int_{-1}^1 P(t)^2 dt,$$

Peut-on avoir égalité ? Si oui, pour quels éléments ?

Solution : On considère le produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

Alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $Q = X, P \in \mathbb{R}[X]$ on a :

$$|\langle P, Q \rangle|^2 \leq \langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle$$

Or

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \text{ et } \langle Q, Q \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

Donc

$$\left(\int_{-1}^1 tP(t) dt \right)^2 \leq \frac{2}{3} \int_{-1}^1 P(t)^2 dt$$

Comme $\frac{2}{3} \leq 1$ on obtient bien

$$\left(\int_{-1}^1 tP(t) dt \right)^2 \leq \frac{2}{3} \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \leq \int_{-1}^1 P(t)^2 dt.$$

Cas d'égalité :

L'égalité dans Cauchy-Schwarz a lieu si et seulement si P et $Q = X$ sont proportionnelles. Mais l'égalité demandée n'est possible que si $P = 0$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^4 kx_k y_k$ où $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. On considère le sous-espace vectoriel $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

(1) Construire une base orthonormée de E .

Solution :

$$\begin{aligned} E &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_2 - x_3\} \\ &= \{(-x_2 - x_3, x_2, x_3, x_4) : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(0, 0, 0, 1) : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(u_1 = (-1, 1, 0, 0), u_2 = (-1, 0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 0, 1)) \end{aligned}$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est une génératrice pour E qui est aussi une famille libre (c'est assez simple à voir que $[c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow c_i = 0, i = 1, 2, 3]$.) Donc la famille est une base pour E .

On va utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour l'orthogonalisation.

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 = (-1, 1, 0, 0), \\ e_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 = (-1, 0, 1, 0) - \frac{1}{3}(-1, 1, 0, 0) = (-2/3, -1/3, 1, 0), \\ e_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 - \frac{\langle u_3, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2 = u_3 - 0e_1 - 0e_2 = (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

$$\text{On a } \langle e_1, e_1 \rangle = 3, \langle e_2, e_2 \rangle = \frac{33}{9}, \langle e_3, e_3 \rangle = 4.$$

Donc $(\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{33}}(-2, -1, 3, 0), \frac{1}{2}(0, 0, 0, 1))$ est une base orthonormée de E .

(2) Quelle est la distance de $(1, 0, 1, -1)$ à E (pour la distance associée au produit scalaire $\langle, \rangle$)?

Solution : On a $\mathbb{R}^4 = E \oplus E^\perp$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^4, x = P_E(x) + P_{E^\perp}(x)$. Ainsi $\|x - P_E(x)\| = \|P_{E^\perp}(x)\|$. De plus $\dim E = 3 \Rightarrow \dim E^\perp = 1$ où

$$\begin{aligned} E^\perp &= \{\alpha \in \mathbb{R}^4 : \langle \alpha, u_i \rangle = 0, i = 1, 2, 3\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 2x_2, x_1 = 3x_3, x_4 = 0\} \\ &= \text{Vect}(w = (6, 3, 2, 0)). \end{aligned}$$

Soit $a = (1, 0, 1, -1)$ alors $d(a, E) = \|a - P_E(a)\| = \|P_{E^\perp}(a)\| = \left\| \frac{\langle a, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w \right\| = \frac{|\langle a, w \rangle|}{\|w\|} = \frac{12}{\sqrt{66}} = \frac{2\sqrt{66}}{11}$.

Exercice 4. (a) Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E .

Montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$ en général, avec égalité si la dimension de E est finie.

Solution : Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E . On rappelle que l'orthogonal $F^\perp$ de F est défini par : $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$.

— **Inclusion** $F \subset (F^\perp)^\perp$: Soit $x \in F$. Pour tout $y \in F^\perp$, on a par définition de $F^\perp$:

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Cela signifie que $x \in (F^\perp)^\perp$. Donc, $F \subset (F^\perp)^\perp$.

— **Égalité en dimension finie** : Il est facile à voir que pour tout sous-espace G de E , on a $G \cap G^\perp = \{0\}$ car si $v \in G \cap G^\perp$, alors v doit être orthogonal à lui-même, ce qui implique que $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = 0$.

Supposons maintenant que E soit de dimension finie. On obtient alors que $G + G^\perp = E$ et, avec le résultat précédent $E = G \oplus G^\perp$. Choisissons simplement une base $e_1, \dots, e_k$ de G que l'on complète en une base $e_1, \dots, e_n$ de E . En appliquant le procédé de Gram-Schmidt (dans l'ordre de la base), on obtient une base orthonormée de E pour laquelle les premiers k vecteurs se trouvent dans G et les $(n - k)$ vecteurs restants sont orthogonaux aux premiers. On a donc $e_j \in G$ si $j \leq k$ et $e_j \in G^\perp$ si $j > k$.

On a montré que

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E,$$

mais aussi

$$\dim F^\perp + \dim (F^\perp)^\perp = \dim E.$$

Ces deux équations ensemble montrent que $\dim F = \dim (F^\perp)^\perp$ et comme $F \subset (F^\perp)^\perp$, on a $F = (F^\perp)^\perp$.

(b) On considère l'espace de toutes les suites réelles $E = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ que l'on munit d'une structure d'espace vectoriel avec l'addition composante par composante

$$(a_n)_n + \lambda (b_n)_n = (a_n + \lambda b_n)_n \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et toutes suites } (a_n)_n, (b_n)_n \in E.$$

Soit F le sous-espace des suites qui s'annulent sauf pour un nombre fini de composantes et soit

$$\ell^2(\mathbb{R}) := \left\{ (a_n)_n \mid \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty \right\}.$$

1. Montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F comme sous-espace.

Solution :

— Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, nous avons $0 \leq (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, donc $|2ab| \leq a^2 + b^2$ et en particulier $|a + b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$.

Si $(a_n)_n, (b_n)_n \in \ell^2(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$, alors :

$$\sum_{j=0}^N |a_j + \lambda b_j|^2 \leq 2 \left(\sum_{j=0}^N |a_j|^2 + |\lambda|^2 \sum_{j=0}^N |b_j|^2 \right) \leq 2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 + |\lambda|^2 \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2 \right) < \infty.$$

Comme la suite $(\sum_{j=0}^N |a_j + \lambda b_j|^2)_N$ est croissante et bornée, elle converge. Donc $(a_n)_n + \lambda (b_n)_n \in \ell^2(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E .

— Toute suite de F a un nombre fini de termes non nuls, donc sa série des carrés est finie. Ainsi, $F \subset \ell^2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que le produit scalaire

$$\langle (a_n)_n, (b_n)_n \rangle := \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j$$

est défini sur $\ell^2(\mathbb{R})$ (mais pas sur E). Il n'est pas nécessaire de montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Solution : Soient $(a_n)_n, (b_n)_n \in \ell^2(\mathbb{R})$. Il suffit de montrer que la série est $\sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j$ converge absolument, c'est-à-dire, $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j b_j| < \infty$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^N |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=0}^N |a_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^N |b_j|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Le produit scalaire est donc bien défini sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

3. Trouver $F^{\perp}$ (comme sous-espace de $\ell^2(\mathbb{R})$) et, à la suite, $(F^{\perp})^{\perp}$.

Solution :

— Soit $(a_n)_n \in \ell^2(\mathbb{R})$. Alors $(a_n)_n \in F^{\perp}$ si et seulement si pour toute suite $(b_n)_n \in F$, on a :

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j = 0.$$

Comme F contient les suites qui valent 1 en une seule position et 0 ailleurs, cela implique que $a_j = 0$ pour tout j . Donc $F^{\perp} = \{0\}$.

Par conséquent, $(F^{\perp})^{\perp} = \ell^2(\mathbb{R})$ et en particulier $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$.