Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2026

Algèbre IV — Durée : 1h30

Contrôle continu 2

Chaque exercice compte pour un tiers de la note totale.

Exercice 1. 1. On considère la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que A est une matrice orthogonale.

(b) Calculer son déterminant et en déduire une valeur propre réelle λ de A.

(c) Déterminer l'espace propre E_λ associé à λ, puis une base orthonormée de $E_\lambda^\perp$.

(d) Décrire la nature géométrique de la transformation de l'espace $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A, ainsi que ses éléments caractéristiques (axe et angle de rotation, plan de symétrie, etc., lorsqu'ils existent).

2. Dans cette question, on veut déterminer toutes les matrices de $SO_3(\mathbb{R})$ (isométries vectorielles directes) dont la première colonne est :

$$\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Expliquer pourquoi le problème est bien posé (c'est-à-dire, qu'il admet des solutions).

(b) Déterminer les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ que l'on peut choisir pour la seconde colonne.

(c) Expliquer pourquoi la troisième colonne est uniquement déterminée par les deux premières, et résoudre le problème.

Exercice 2. 1. Soit $n \geq 2$ un entier et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. On munit E du produit scalaire suivant :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0) \cdot Q^{(k)}(0).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $e_k = \frac{1}{k!}X^k$ et $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n)$. Soit D l'endomorphisme de dérivation défini par $D(P) = P'$.

(a) Pour tous $j, k \in \mathbb{N}$ et $P = X^k$, montrer que

$$P^{(j)}(0) = \begin{cases} j! & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Montrer que la base $\mathcal{B}$ est orthonormée.

(c) Déterminer la matrice de D dans la base $\mathcal{B}$.

(d) En déduire la matrice de D^* dans la base $\mathcal{B}$.

(e) Montrer que $D \circ D^*$ est la projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}\{1, X, \ldots, X^{n-1}\}$.

2. Désormais, $E = \mathbb{R}[X]$ et on le munit du même produit scalaire que dans la question 2. D désigne toujours l'endomorphisme de dérivation. On considère la base $\mathcal{B} = (e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $e_k = \frac{1}{k!}X^k$, et l'endomorphisme I de E tel $I(e_k) = e_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Vérifier que pour tout $P \in E$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $I(P)(x) = \int_0^x P(t)dt$.
   (b) Montrer que $D^* = I$. *Indication :* calculer $\langle D(e_k), e_j\rangle$.
   (c) À quoi est égal $D \circ D^*$?

Exercice 3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, avec $n > 1$, dont la matrice exprimée dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix},$$

où les coefficients diagonaux sont égaux à $a \in \mathbb{R}$ et tous les autres égaux à $b \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer en fonction de a et b toutes les valeurs propres de u et leurs multiplicités.

Dans toute la suite, on suppose $b \neq 0$.

2. Déterminer une base pour chaque espace propre de u.
3. Interpréter géométriquement l'endomorphisme u.
4. L'endomorphisme u est-il auto-adjoint ?
5. Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de u.
6. Dans le cas où $n = 3$, expliciter une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de u.

Correction du CC2.

Exercice 1.

1. (a) Il suffit de calculer ${}^tAA$ et de vérifier qu'on trouve bien la matrice I_3.

   (b) On trouve $\det A = -1$. Il s'ensuit que $\lambda = -1$ est nécessairement valeur propre de A. On peut justifier cela de plusieurs manières : par exemple, en considérant les trois valeurs propres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de la matrice A (qui sont nécessairement sur le cercle unité complexe). Si $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$, alors $\bar{\lambda_1}$ est aussi valeur propre de A (car c'est une matrice à coefficients réels), supposons sans perte de généralité qu'il s'agit de λ_2. Alors $\lambda_1\lambda_2 = |\lambda_1|^2 = 1$, et $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \lambda_3 = \det A = -1$, ce qui permet de conclure.

   On pouvait également raisonner en considérant la réduction des matrices orthogonales : par un changement de base orthogonale, la matrice A est semblable à une matrice diagonale par blocs, et dont les blocs possibles sont $I_m, -I_n$, et des blocs rotations $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Etant donné que le déterminant de A est invariant par changement de base, les possibilités sont : $A = -I_3, A = Diag(1,1,-1)$, ou $A = Diag(-1, R_\theta)$. Dans chacun de ces cas, -1 est valeur propre réelle.

   (c) On commence par résoudre le système $AX = -X$, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} -3x &= -2x - 2y + z \\ -3y &= x - 2y - 2z \\ -3z &= -2x + y - 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \\ -2x + y + z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z &= 0 \\ 3x - 3y &= 0 \\ -3y + 3z &= 0 \end{cases}$$

   D'où l'on tire $x = y$ et $y = z$, et $E_{-1} = Vect(1,1,1)$. Il suffit de prendre un vecteur unitaire pour obtenir une base orthonormée de cet espace, par exemple $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Il s'ensuit que $E_{-1}^{\perp}$ est le plan d'équation $x+y+z = 0$. Il est engendré par les vecteurs orthogonaux $u_2 = (1,-1,0)$ et $u_3 = (0,1,-1)$. On obtient une base orthogonale de ce plan via le procédé de Gram-Schmidt : pour cela, on pose $v_2 = u_2$ et $v_3 = u_3 - \frac{\langle v_2, v_3\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = (0,1,-1) + \frac{1}{2}(1,-1,0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. Cela donne une base orthogonale v_2, v_3 de ce plan, qu'il ne reste qu'à normaliser. On trouve alors :

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2).$$

   (a) La matrice A représente une anti-rotation autour de l'axe $(1,1,1)$. Pour déterminer son angle θ, on utilise le fait que, à changement de base orthogonale près, cette transformation s'écrit matriciellement : $Diag(-1, R_\theta)$. La trace de cet endomorphisme, étant invariante par changement de base, est donc $-1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}A = -2$. On en déduit que $\cos(\theta) = \frac{-1}{2}$, et donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

2. (a) Ce vecteur colonne est de norme 1, car $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^3$. Le problème est donc bien posé car il revient à déterminer le compléter en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

(b) Un tel vecteur doit être orthogonal au premier vecteur colonne, donc :

$$5a + 12b = 0$$

On a donc nécessairement $b = -\frac{5}{12}a$. Par ailleurs, un tel vecteur doit nécessairement être de norme 1, donc

$$a^2 + \frac{25}{144}a^2 + c^2 = (\frac{13a}{12})^2 + c^2 = 1$$

Puisque a^2 et c^2 sont positifs, il est nécessaire que $a \in [-\frac{12}{13}, \frac{12}{13}]$, et que $c \in [-1, 1]$. Pour un tel a, on a nécessairement $c = \pm\sqrt{1 - \frac{13a}{12}^2}$. Cela donne donc deux vecteurs candidats, dont on vérifie sans peine que pour tout $a \in [-\frac{12}{13},$ ils donnent bien deux vecteurs unitaires et orthogonaux à la colonne donnée.

Pour simplifier les écritures, on peut utiliser le fait que deux réels dont la somme des carrés vaut 1 peuvent s'écrire (de manière unique modulo 2π) comme le cosinus et le sinus d'un même angle. C'est le cas de $\frac{13}{12a}$ et de c, donc ces vecteurs candidats sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \frac{12}{13}\cos(\theta) \\ -\frac{5}{13}\cos(\theta) \\ \pm\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

pour $\theta \in [0, 2\pi]$ quelconque.

(c) Le troisième vecteur doit former avec les deux autres une base orthonormée directe ; il est donc uniquement déterminé. On peut le calculer en formant le produit vectoriel des deux premiers vecteurs. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on trouve alors deux matrices candidates :

$$A_1 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12\cos\theta & 12\sin\theta \\ 12 & -5\cos\theta & -5\sin\theta \\ 0 & 13\sin\theta & -13\cos\theta \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12\cos\theta & -12\sin\theta \\ 12 & -5\cos\theta & 5\sin\theta \\ 0 & -13\sin\theta & -13\cos\theta \end{pmatrix}.$$

On vérifie sans peine que ce sont bien des matrices orthogonales (par exemple en formant les produits scalaires des colonnes deux-à-deux et en utilisant l'identité $5^2 + 12^2 = 13^2$). Par ailleurs, un calcul rapide donne $\det A_1 = 1$ et $\det A_2 = -1$, donc seule $A_1 \in SO_3(\mathbb{R})$. On a alors trouvé l'ensemble des matrices qui conviennent.

Exercice 2.

1. (a) Pour $j \leq k$, $P^{(j)} = k(k-1)\cdots(k-j+1)X^{k-j}$ ce qui implique que $P^{(j)}(0) = 0$ si $j < k$. Cela implique aussi l'égalité $P^{(k)} = k!$ d'où on déduit $P^{(k)}(0) = k!$ et $P^{(j)} = 0$ et $P^{(j)}(0) = 0$ pour $j > k$.

   (b) Soient $j, k, l \in \{0, \ldots, n\}$ avec $k \neq l$. La question précédente montre que $e_k^{(j)}(0) \cdot e_l^{(j)}(0)$ est non-nul seulement si $k = j = l$. Cela montre que $\langle e_k, e_l \rangle$ donne lieu à une somme de termes nuls donc est nul. De plus, $\langle e_k, e_k \rangle = \sum_{j=0}^{n}(e_k^{(j)}(0))^2 = (e_k^{(k)}(0))^2 = (k!/k!)^2 = 1$. La base $\mathcal{B}$ est donc orthonormée.

(c) Les calculs de la question 1 nous donnent : $D(e_k) = e_{k-1}$ pour $k = 1, \dots, n$ et $D(e_0) = 0$. Notons M la matrice de D dans la basee $\mathcal{B}$. On a

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) La matrice M est la matrice de D dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ donc la matrice de D^* dans cette même base sera ${}^tM$.

(e) Remarquons pour commencer que $F = \mathrm{Vect}\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ et donc $F^\perp = \mathrm{Vect}\{e_n\}$. Pour $k = 0, \dots, n-1$, $D(D^*(e_k)) = D(e_{k+1}) = e_k$. Par linéarité, pour tout $P \in F$, $D \circ D^*(P) = P$. De plus, $D \circ D^*(e_n) = D(0) = 0$ donc pour tout $P \in F^\perp$, $D \circ D^*(P) = 0$. On peut conclure que $D \circ D^*$ est la projection orthogonale sur F.

2. (a) Par linéarité, il suffit de montrer que l'égalité est satisfaite pour $P = e_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ce qui se montre facilement.

(b) Soient $k, j \in \mathbb{N}$. Alors

$$\langle D(e_k), e_j \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (e_{k-1})^{(m)}(0)(e_j)^{(m)}(0) = \sum_{m=0}^{\infty} e_{k-m-1}(0)e_{j-m}(0),$$

avec la convention $e_k = 0$ si $k < 0$. D'autre part,

$$\langle e_k, I(e_j) \rangle = \langle e_k, e_{j+1} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} e_{k-m}(0)e_{j+1-m}(0).$$

Dans la dernière somme, on fait le changement d'écriture en posant $p = m - 1$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle e_k, I(e_j) \rangle &= \sum_{p=-1}^{\infty} e_{k-(p+1)}(0)e_{j+1-(p+1)}(0) = \sum_{p=-1}^{\infty} e_{k-p-1}(0)e_{j-p}(0) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} e_{k-p-1}(0)e_{j-p}(0) + e_k(0)e_{j+1}(0) (\text{la somme } \sum_{p=0}^{\infty} \text{ et le terme avec } p = -1) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} e_{k-p-1}(0)e_{j-p}(0) = \langle D(e_k), e_j \rangle, \end{aligned}$$

car $e_{j+1}(0)$ est nul pour tout $j \in \mathbb{N}$ car e_{j+1} est toujours factoriable par X. Le calcul précédent ainsi que la bilinéarité du produit scalaire impliquent que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\langle D(P), Q \rangle = \langle P, I(Q) \rangle$ d'où $D^* = I$.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D \circ D^* = D(I(e_k)) = D(e_{k+1}) = e_k$. Ainsi $D \circ D^*$ et Id_E coïncident sur la base $\mathcal{B}$. On peut en conclure que $D \circ D^* = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 3.

Nous remarquons que la matrice A s'écrit sous la forme

$$A = (a-b)I_n + bJ,$$

où J est la matrice de taille n dont tous les coefficients valent 1 et I_n est la matrice identité.

1. Soit $\mathbf{1}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a alors $J\mathbf{1} = n\mathbf{1}$ et

$$A\mathbf{1} = \big((a-b)I_n + bJ\big)\mathbf{1} = (a-b)\mathbf{1} + bn\mathbf{1} = \big(a+(n-1)b\big)\mathbf{1}.$$

   Ainsi $\mathbf{1}$ est un vecteur propre de u, associé à la valeur propre $\lambda_1 = a+(n-1)b$.
   Considérons maintenant l'hyperplan

$$H = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}.$$

   Pour tout vecteur x de H, on a $Jx = 0$ et

$$Ax = \big((a-b)I_n + bJ\big)x = (a-b)x.$$

   Ainsi, tout vecteur de H est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = a-b$.
   Déterminons les multiplicités de ces valeurs propres. On a

$$\dim \operatorname{Vect}(\mathbf{1}) = 1, \qquad \dim H = n-1.$$

   De plus,

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Vect}(\mathbf{1}) \oplus H,$$

   qui constitue une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en sous-espaces propres. Il n'y a donc pas d'autre valeur propre.
   En conclusion, l'endomorphisme u ne possède que deux valeurs propres, $\lambda_1 = a+(n-1)b$ de multiplicité 1 et $\lambda_2 = a-b$ de multiplicité $n-1$. Si $b \neq 0$, ces deux valeurs propres sont distinctes. Dans le cas où $b = 0$, on a $A = aI_n$ et a est l'unique valeur propre de u de multiplicité n.
   [[Autre méthode : calculer le rang de la matrice $A-(a-b)I_n$, en déduire que $a-b$ est valeur propre de multiplicité $n-1$ et déduire l'autre valeur propre par la formule liant la trace de A à la somme de ses valeurs propres.]]

2. Notons E_{λ_1} et E_{λ_2} les sous-espaces propres de u associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement. D'après la question précédente, on a $E_{\lambda_1} = \operatorname{Vect}(\mathbf{1})$ et $E_{\lambda_2} = H$.
   Le vecteur $\mathbf{1}$ constitue donc une base de E_{λ_1} et une base de l'hyperplan E_{λ_2} est donnée par la famille $(e_1-e_2,\ e_1-e_3,\ \dots,\ e_1-e_n)$, où $(e_1,\dots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3. Pour le produit scalaire usuel, on a $H = \mathbf{1}^\perp$. La décomposition $\mathbb{R}^n = \operatorname{Vect}(\mathbf{1}) \oplus H$ est donc orthogonale. Par ailleurs, les restrictions de l'endomorphisme u sur ces deux sous-espaces sont données par

$$u_{|\operatorname{Vect}(\mathbf{1})} = \big(a+(n-1)b\big)\operatorname{Id}, \qquad u_{|H} = (a-b)\operatorname{Id}.$$

   Ainsi l'endomorphisme u correspond à deux homothéties selon des directions orthogonales :

— une homothétie de rapport $a + (n-1)b$ sur la droite $\mathrm{Vect}(\mathbf{1})$,

— une homothétie de rapport $a - b$ sur l'hyperplan H.

4. La matrice A est l'expression de l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormée pour le produit scalaire usuel. Cette matrice est symétrique, donc l'endomorphisme u est auto-adjoint.

5. Comme u est un endomorphisme auto-adjoint de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de u.

   [[Autre méthode : voir directement que les deux valeurs propres sont distinctes et que les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme auto-adjoint sont orthogonaux. Il suffit donc de normaliser un générateur de E_{λ_1}, puis de choisir une base orthonormée de E_{λ_2}. La réunion de ces vecteurs donne une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de u.]]

6. Dans $\mathbb{R}^3$, on a

$$E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}(1,1,1), \qquad E_{\lambda_2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}.$$

   Pour le vecteur propre dans E_{λ_1}, on normalise $(1,1,1)$:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

   Pour les deux autres vecteurs propres dans E_{λ_2}, on peut prendre

$$v_2 = (1,-1,0), \qquad v_3 = (1,1,-2),$$

   vecteurs de E_{λ_2} vérifiant $\langle v_2, v_3\rangle = 0$. Ces deux vecteurs étant orthogonaux, il suffit de les normaliser :

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2).$$

   Par suite, la famille (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de u.