
Contrôle continu 2

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. On considère G le sous-espace vectoriel de E formé des quadruplets (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 - x_2 + x_4 = 0.$$

1. Déterminer une base orthonormée de G .
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale p_G sur G .
3. Soit $x = (1, 1, 1, 1)$. Déterminer la distance de x à G .

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel euclidien, et soient u, v deux endomorphismes auto-adjoints de E .

1. Démontrer que $\ker(u)^\perp \oplus \operatorname{Im}(u) = E$.
2. Démontrer que $u \circ v$ est auto-adjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 3. Justifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, et trouver une matrice orthogonale $P \in O_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que

$$A = PD^tP.$$

Exercice 4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien réel E , donc u est diagonalisable. On suppose que $\operatorname{tr}(u) = 0$, c'est-à-dire que la somme de ses valeurs propres (comptées avec multiplicité) est nulle. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien de dimension n et u, v deux vecteurs orthogonaux non-nuls de E . On définit l'endomorphisme f de E par $f(x) = x + \langle x, v \rangle u$.

1. Démontrer que $\ker(f - \operatorname{Id})$ est de dimension $n - 1$ et déterminer $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$. En déduire que $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$ est contenu dans $\ker(f - \operatorname{Id})$.
2. Déterminer les valeurs propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Démontrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où α est un réel non nul.

4. L'endomorphisme f est-il auto-adjoint ?