
Contrôle continu 1

Exercice 1. Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la forme

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soit F le sous-espace vectoriel de E des fonctions affines réelles, c'est à dire des fonctions $f(t) = a + bt$, avec a et b réels. Trouver une base orthonormée de F pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 2. Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une famille orthonormée de vecteurs dans un espace euclidien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Pour tous réels $a_1, \dots, a_m$, on pose

$$v = a_1e_1 + \dots + a_me_m.$$

1. Montrer que

$$\|v\|^2 = a_1^2 + \dots + a_m^2.$$

2. En déduire que toute famille orthonormée de V est linéairement indépendante.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On définit une nouvelle forme sur E par

$$\phi(u, v) = \langle f(u), f(v) \rangle \quad \text{pour tous } u, v \in E.$$

1. Vérifier que ϕ est une forme bilinéaire et symétrique.
2. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E si et seulement si f est injectif.
3. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) pour tous $u, v \in E$, on a $\phi(u, v) = \langle u, v \rangle$;
- (b) pour tout $u \in E$, on a $\|f(u)\| = \|u\|$.

Exercice 4. Soit a et b deux réels, $a < b$. Soit A l'ensemble des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, déterminer

$$\inf_{f \in A} \left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \right).$$

2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in A$ pour lesquelles cette borne est atteinte.

Exercice 5. Soit E l'espace de matrices réelles 2×2 muni du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{tr}(^tAB)$.

Soit F le sous-espace des matrices diagonales.

- (i) Chercher une base de $F^\perp$.
- (ii) Donner une base orthonormée de $F^\perp$.