Université Claude Bernard Lyon 1

ANALYSE2 INFO, printemps 2026

Fiche TD n°4,

Suites récurrentes

Exercice pour s'échauffer

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de q converge-t-elle ?
2. Pour quelles valeurs de q admet-t-elle une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$?
3. Pour quelles valeurs de q est-elle croissante, pour lesquelles est-elle décroissante ?
4. Pour quelles valeurs de q est-elle alternante ?

Suites récurrentes d'ordre 1

Dans tous les exercices suivants, on considère des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies récursivement avec une récursion d'ordre 1 :

$$u_{n+1} = f(u_n)\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dans chaque exercice, la fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ sera spécifiée et la valeur initiale u_0 sera donnée.

Nous remarquons que pour que la récursion soit bien définie, il est important qu'il existe un intervalle $I \subset D_f$ contenant u_0 qui soit stable par f : $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$. Même si parfois il n'est pas demandé de chercher un tel intervalle I, il est essentiel qu'il existe.

Exercice 2. Soit $p \in \mathbb{R}$.

1. Trouver l'unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui passe par le point (p, p) et dont le graphe est une droite de pente $k \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$.
2. Trouver tous les points fixes de la fonction f. Quelles sont les limites possibles pour u_n a priori ?
3. Déterminer la limite de (u_n) pour $k > 1$ selon la valeur initiale u_0. Expliquer ce comportement à l'aide d'un graphique.
4. Pour quelles valeurs de p et k la fonction f est-elle contractante ? Conclure sur la convergence de la suite (u_n) en utilisant le théorème du point fixe. Quelle est sa limite et quelle est la vitesse de convergence ? Représentez graphiquement ce comportement, d'abord pour $k = \frac{1}{2}$, puis pour $k = -\frac{1}{2}$.
5. Que peut-on dire de la suite si $k < -1$, selon la valeur de u_0 ? Représenter graphiquement.
6. Définir une nouvelle séquence (v_n) au moyen de $v_n := u_n - p$. Montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique et comparez les résultats obtenus ici avec ceux trouvés dans l'Exercice 1.

Exercice 3.
Étudier la convergence et calculer l'éventuelle limite de chacune des suites récurrentes définies par :

1. $f(x) = \frac{1}{6}x + 5$, $u_0 = 3$.
2. $f(x) = -2x + 1$, $u_0 = 0$.
3. $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $u_0 = 8$.

Exercice* 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}.$$

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **5.** Soit $f(x) = \dfrac{3-x^2}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

1. (a) Montrer que f est décroissante sur $[0, \infty[$.
   (b) Montrer que l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$ est stable par f. Quelle conclusion en tirer sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (c) Trouver $\ell \in [0, +\infty[$ tel que $f(\ell) = \ell$.
2. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6 ($\sim$ CC 2023)**.** Considerons la suite récurrente définie par $u_0 = 5$ et

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\arctan x.$$

1. f a un point fixe $l \in \mathbb{R}$ évident, lequel ?
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7.
Soit $f(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) - 1)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que u_n converge et déterminer sa limite.

Indication: f a un point fixe $l \in \mathbb{R}$ évident, lequel ?

Exercice 8. Soit $f(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - 3x\right)$.

1. Déterminer les extremums locaux x_- et x_+ de la fonction f, $x_- \leq x_+$, et ses trois points fixes l_-, l_0, l_+, $l_- < l_0 < l_1$. Dessiner le graphe de la fonction f.
2. Soit $I_0 = [x_-, x_+]$. Montrer que $f(I_0) \subset I_0$ et que la fonction f est contractante sur l'intervalle I_0. Que peut-on en déduire sur $\lim_{n\to\infty} u_n$ si $u_0 \in I_0$?
3. Montrer que les intervalles $I_- :=]-\infty, l_-]$ et $I_+ := [l_+, \infty[$ sont stables par rapport à f. Que peut-on dire de $\lim_{n\to\infty} u_n$ si $u_0 \in I_-$, et si $u_0 \in I_+$?
4. Soit $u_0 = 2$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 9. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ et soit g la fonction définie par $g(x) := f(x) - x$.

1. Montrer que p est un point fixe de f si et seulement s'il est un zéro de g.
2. En déduire que f a au plus un point fixe si g est strictement monotone.
3. Soient p_1 et p_2 deux zéros successifs de la fonction g avec $p_1 < p_2$.
   (a) Montrer que si g et f', restreintes à l'intervalle $I =]p_1, p_2[$, sont strictement positives, alors I est stable par rapport à f et si $u_0 \in I$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = p_2$.
   (b) Montrer que si pour tout x dans $I :=]p_1, p_2[$ on a $g(x) < 0$ et $f'(x) > 0$, alors I est stable par rapport à f et si $u_0 \in I$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = p_1$.
4. Soit $u_0 = \frac{1}{2}$ et
$$f(x) = x^2 + \frac{3}{16}\,.$$
   Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
5. Soit $u_0 = -\frac{1}{2}$ et
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}\,.$$
   Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 10. Soit $f(x) = (x-1)^2$.

1. Calculer les deux points fixes p_1 et $p_2 > p_1$ de f.
2. Montrer que les deux intervalles $I_1 := [0,1]$ et $I_2 := [p_2, \infty[$ sont stables par rapport à f.
3. Dans les cas suivants, déterminer si la suite (u_n) converge ou si elle a une limite et calculer $lim_{n\to\infty} u_n$ si la limite existe :
   (a) $u_0 = p_2$.
   (b) $u_0 > p_2$.
   (c) $u_0 = 2$. *Indication*: Calculer u_1, u_2, ...
   (d) $u_0 = -3$. *Indication*: Calculer u_1.
4. Soit $u_0 = \frac{1}{2} \in I_1$. Pour tout $n \geq 0$ on pose

$$v_n := u_{2n}\,, \qquad w_n := u_{2n+1}\,.$$

   (a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
   (b) En déduire que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   (c) Montrer que les deux suites (v_n) et (w_n) convergent.
   (d) En déduire que la suite (u_n) diverge.

Exercice 11. Soit $f\colon \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{2x-1}$.

1. Soit $u_0 = 2$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
2. Que se passe-t-il si $u_0 = \frac{5}{8}$? *Indication*: Essayer de calculer u_1, u_2 et u_3.
3. Montrer que la suite est mal définie pour toute valeur de $u_0 \in [\frac{1}{2}, 1[$.
   Indication: Regarder $(u_1)^2 - (u_0)^2$.
4. Trouver tous les intervalles fermés I stable par rapport à f.

Exercice 12 (CC 2023). Soit $a > 0$. Considérons la suite récurrente définie par

$$f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

et un $u_0 > \sqrt{a}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   Indication: Considérer l'intervalle $I = [\sqrt{a}, u_0]$.
2. Montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.
   Indication: Il existe plusieurs façons de le faire. Dans tous les cas, vous êtes autorisé à utiliser les résultats du cours.

Exercice 13 (CF 2025).

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{2}x + 4.$$

1. Déterminer les points fixes de cette fonction.

2. Montrer que la fonction f, lorsqu'elle est restreinte à l'un des deux intervalles suivants, est strictement monotone :
$$I_1 = \left[\tfrac{3}{2}, 3\right], \quad I_2 = [9, +\infty[.$$
3. Montrer que les intervalles I_1 et I_2 sont stables par f, c'est-à-dire que :
$$f(I_i) \subset I_i \quad \text{pour } i \in \{1, 2\}.$$
4. Montrer que la restriction de f à l'intervalle I_1 est une fonction contractante.

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ et une valeur initiale u_0 donnée.

5. Quelle est la limite de cette suite si $u_0 := \frac{3}{2}$?
6. Quelle est la limite de cette suite si $u_0 := 9$?

Suites linéaires récurrentes d'ordre 2

Exercice 14.
Donner l'expression du terme général des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Indication: Dans le cas où les racines de l'équation caractéristique sont complexes, mettre les racines sous la forme $\lambda_\pm = re^{\pm i\theta}$. Déterminer ensuite une base complexe de solutions. En prenant sa partie réelle et sa partie imaginaire, on obtient une base à valeurs réelles. Ce n'est qu'ensuite que l'on calcule les constantes de manière à ce que les conditions initiales soient satisfaites.

Exercice 15.
Donner l'expression du terme général des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2, u_1 = 10\sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\sqrt{2}u_{n+1} - 4u_n$.

Équation différentielle et suite récurrente, toutes deux d'ordre 2

Exercice 16 (CF$_2$ 2025)**.** Le but de cet exercice est, d'une part, de résoudre l'équation différentielle
$$y''(x) - 2\sqrt{3}y'(x) + 4y(x) = 0, \quad \text{avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0 \tag{1}$$
et, d'autre part, d'étudier la suite définie par la relation de récurrence
$$u_{n+2} = 2\sqrt{3}u_{n+1} - 4u_n, \quad \text{avec } u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 0. \tag{2}$$

1. Trouver les deux solutions λ_+ et λ_- de l'équation quadratique
$$\lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4 = 0,$$
à la fois en coordonnées cartésiennes et polaires ; en d'autres termes, déterminer les constantes réelles a, b, r et θ telles que
$$\lambda_\pm = a \pm ib = re^{\pm i\theta}.$$
2. Quelle est la solution générale de l'équation (1) ?
3. Spécialiser la solution générale à celle qui satisfait les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
4. Quelle est la solution générale de l'équation (2) ?
5. Spécialiser la solution générale à celle qui satisfait les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.