

## ANALYSE2 INFO, printemps 2026

### Fiche TD n°3,

### Dérivabilité, TAF, DL et formules de Taylor

#### Calcul des dérivées

#### Exercice 1.

- Déterminer la dérivée de la fonction arctan en utilisant la formule

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

valable pour toute fonction dérivable  $f$  dans les régions où  $f'$  (en fait  $f' \circ f^{-1}$ ) est non nulle. (Comment trouvez-vous cette égalité? — Pour simplifier, en supposant que  $f^{-1}$  est différentiable.)

*Rappel* : Par définition, arctan est la fonction réciproque de la fonction  $\tan$   $], la fonction qui est elle-même la restriction de la fonction  $\tan$  à l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .$

- Trouver également la dérivée de la fonction arcsin, définie sur l'intervalle ouvert  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

*Rappel* : Par définition, arcsin est la fonction réciproque de la fonction  $\sin$   $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

**Exercice 2.** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Calculer  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a f(x) - x f(a)}{x - a}$ , pour un  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 3.** En utilisant que la dérivée de la fonction  $\sin$  est la fonction  $\cos$ , calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .

#### Dérivabilité

Dans notre UE,  $\lim_{x \rightarrow a}$  désigne toujours la limite ponctuelle. Autrement dit,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  signifie que pour **toute** suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $x_n \neq a$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .

Une fonction est dite continue au point  $a$  si 1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  pour un  $l \in \mathbb{R}$ , et 2.  $f(a) = l$ .

De plus, la notation  $\lim_{x \rightarrow a-}$  signifie que tous les termes de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient l'inégalité stricte  $x_n < a$  (de manière analogue pour  $\lim_{x \rightarrow a+}$ ). Pour le reste, voir le cours.

**Exercice 4.** Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  et définissons  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{si } x < 0, \\ \beta & \text{si } x = 0, \\ \gamma x + \delta & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Montrer que  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$  en calculant toutes ses dérivées pour  $x \neq 0$ .
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x)$  (pour tous les  $\alpha, \beta, \gamma$ , et  $\delta$  dans  $\mathbb{R}$ ).
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$ .
- Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  afin que
  - $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ .
  - $f'_g(0)$  existe et la calculer dans ce cas.

- (c)  $f'_d(0)$  existe et la calculer dans ce cas.
- (d)  $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ .
- (e)  $f \in \mathcal{C}^5(\mathbb{R})$ .

*Rappel* :  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  si—par définition— $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

$f'_g(0)$  et  $f'_d(0)$  dénotent la dérivée de  $f$  respectivement à gauche et à droite en 0.

$f \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$  si—par définition— $f$  est  $n$  fois dérivable.

$f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$  si—par définition—on a  $f \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$  et sa  $n$ -ième dérivée appartient à  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ .

**Exercice 5** (CC 2023, sauf 4. et 5.). Définissons  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0, \\ x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue ?
2. La fonction  $f$  est-elle dérivable ? Si oui, sa dérivée est-elle continue ?
3. La fonction  $f$  est-elle deux fois dérivable ? Si oui, sa deuxième dérivée est-elle continue ?
4. Quel est le  $n \in \mathbb{N}$  maximal tel que  $f \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$  ?
5. Quel est le  $n \in \mathbb{N}$  maximal tel que  $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$  ?
6. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

**Exercice 6.** Définissons  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si } x \geq 0, \\ x + x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue ?
2. La fonction  $f$  est-elle dérivable ? Si oui, sa dérivée est-elle continue ?
3. La fonction  $f$  est-elle deux fois dérivable ? Si oui, sa deuxième dérivée est-elle continue ?
4. Quel est le  $n \in \mathbb{N}$  maximal tel que  $f \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$  ?
5. Quel est le  $n \in \mathbb{N}$  maximal tel que  $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 7.** Soit  $f$  la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ \sin x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que  $f$  est dérivable en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^*$  en calculant sa dérivée.
2.  $f$  est-elle dérivable en 0 ?
3.  $f'$  est-elle continue en 0 ?
4.  $f$  est-elle deux fois dérivable en 0 ?
5.  $f$  est-elle trois fois dérivable en 0 ?
6. Quel est le  $n \in \mathbb{N}$  maximal tel que  $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 8.** Soit  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

En  $x = 0$ ,

1.  $f$  est-elle continue ?
2.  $f$  est-elle dérivable ?
3.  $f'$  est-elle continue ?
4.  $f'$  est-elle dérivable ?
5.  $f''$  est-elle continue ?
6.  $f''$  est-elle dérivable ?
5. Quel est le  $n \in \mathbb{N}$  maximal tel que  $f \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$  ?
6. Quel est le  $n \in \mathbb{N}$  maximal tel que  $f \in C^n(\mathbb{R})$  ?
7. A-t-on  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = (f')'_g(0)$  ?

**Exercice 9.** Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x & \text{si } x < 0 \\ \cos^2(\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 + \frac{\ln x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (1)$$

**Exercice\* 10.** Soit  $f$  la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Montrer que  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

**Exercice** 11 (CC 2023).

On considère la fonction  $f: ]-1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin(x) & \text{si } -1 < x < 0, \\ xe^x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. La fonction  $f$  est-elle continue ?
2. La fonction  $f$  est-elle dérivable ? Si oui, sa dérivée est-elle continue ?
3. La fonction  $f$  est-elle deux fois dérivable ? Si oui, sa dérivée seconde est-elle continue ?

**Exercice 12** (CF 2025).

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha & \text{si } x \leq 0, \\ \sin(x) + \beta \cos(x) & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes indéterminées. On admet que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

1. Pour quelles valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  la limite à droite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$  existe-t-elle ? Et pour de telles valeurs, que vaut cette limite ?
2. Pour quelles valeurs (ou relation) de  $\alpha$  et  $\beta$  la dérivée à droite  $f'_d(0)$  existe-t-elle ? Et dans ce cas, que vaut-elle ?
3. Pour quelles valeurs (ou relation) de  $\alpha$  et  $\beta$  la dérivée  $f'(0)$  existe-t-elle ? Et dans ce cas, que vaut-elle ?
4. Donner, pour les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $f'(0)$  existe, l'expression de la fonction dérivée  $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dans une forme analogue à celle de  $f$  ci-dessus.
5. La fonction  $f$  est-elle de classe  $C^1(\mathbb{R})$  dans ce cas ?
6. Pour quelles valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  a-t-on  $f' \in C^1(\mathbb{R})$  ou encore  $f \in C^2(\mathbb{R})$  ?

## Des accroissements finis

### Exercice 13.

Montrer que 100 est une approximation de  $\sqrt{10001}$  avec une erreur d'approximation inférieure à 0.005.

### Exercice 14.

1. Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  :  $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$ .

2. En déduire que  $\cos(0.01) \geq 0.99$ .

3\* Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  tels que  $x \neq y$  :  $|\cos y - \cos x| < |y - x|$ .

*Indication:* Si  $|y-x| > 2$ , c'est trivial. Pour  $|y-x| \leq 2$ , il y a au plus un  $z \in E := \{\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$  dans l'intervalle  $I$  entre  $x$  et  $y$ . S'il y en a pas, c'est facile car  $|\sin \xi| < 1$  pour tout  $\xi \in I$ .  
Autrement, utiliser  $|\cos y - \cos x| \leq |\cos y - \cos z| + |\cos z - \cos x|$ .

### Exercice 15.

1. Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  avec  $0 \leq a < b$  :

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

2. En déduire que :

$$\frac{12}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{4}{3}.$$

3. Pour un autre choix de  $a$ , en déduire que l'on a même :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

### Exercice 16.

1. Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  avec  $0 \leq a < b < 1$  :

$$\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}.$$

2. En déduire que :

$$\frac{3}{5} < \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{3}{4}.$$

3. Pour un autre choix de  $a$ , en déduire que l'on a même :

$$\frac{\pi}{6} + \frac{1}{5\sqrt{3}} < \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}.$$

### Exercice 17.

1. Montrer que pour tout entier  $k \geq 1$  :  $0 < \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ .

2. En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ .

3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n$  où  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ .

**Exercice 18.** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x \ln x - x$ .

1. En appliquant à  $f$  le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\ln n < f(n+1) - f(n) < \ln(n+1).$$

2. En déduire que pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n < f(n+1) + 1 < \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n+1).$$

3. En déduire que pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

**Exercice\* 19.**

1. Utiliser l'exercice 17 pour montrer que pour  $\alpha \leq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \infty.$$

2. On suppose maintenant  $\alpha > 1$ . Pour  $k \geq 2$ , comparer  $\frac{\alpha-1}{k^\alpha}$  et  $\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}$ .

*Indication:* Appliquer le TAF à la fonction  $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ .

3. Toujours pour  $\alpha > 1$ , montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \ell, \text{ avec } \ell < \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

**La règle de l'Hôpital**

**Exercice 20.** En utilisant la règle de l'Hôpital, trouver les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(2x)}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)^{\frac{1}{x-1}}.$$

**Exercice 21.** En utilisant la règle de l'Hôpital, trouver les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) \cdot \ln(1-x)}{e^x - 1}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \cos(2\pi x)^{\frac{1}{x}}.$$

**Fonctions équivalentes, négligeables ou dominées**

**Exercice 22.** Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

- |                                                                  |                                                      |                                                        |
|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| <u>1.</u> $x^5 + x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .         | <u>7.</u> $x^5 + x = o(x)$<br>$x \rightarrow 0$      | <u>15.</u> $x^2 = O(x)$<br>$x \rightarrow 0$           |
| <u>2.</u> $x^5 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ .   | <u>8.</u> $x^5 + x = o(1)$<br>$x \rightarrow 0$      | <u>16.</u> $x = O(x)$<br>$x \rightarrow 0$             |
| <u>3.</u> $x^5 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^5$ . | <u>10.</u> $e^x = o(\ln( x ))$<br>$x \rightarrow 0$  | <u>17.</u> $1 = O(x)$<br>$x \rightarrow 0$             |
| <u>4.</u> $x^2 = o(x)$<br>$x \rightarrow 0$                      | <u>11.</u> $x = o(x^2)$<br>$x^2 \rightarrow +\infty$ | <u>18.</u> $x^5 + x = O(x)$<br>$x \rightarrow 0$       |
| <u>5.</u> $x = o(x)$<br>$x \rightarrow 0$                        | <u>12.</u> $x^2 = o(x)$<br>$x \rightarrow +\infty$   | <u>19.</u> $x^5 + x = O(1)$<br>$x \rightarrow 0$       |
| <u>6.</u> $1 = o(x)$<br>$x \rightarrow 0$                        | <u>13.</u> $x^2 = o(x)$<br>$x \rightarrow 1$         | <u>20.</u> $x^5 + x = O(1)$<br>$x \rightarrow +\infty$ |

**Exercice 23.** Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1.  $\sin(x) = o_{x \rightarrow 0}(x)$ ,

3.  $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = o_{x \rightarrow 0}(x)$ ,

2.  $\sin(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x)$ ,

4.  $\ln(|x|) = o_{x \rightarrow 0+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ .

**Exercice 24.** Donner un équivalent simple des fonctions suivantes :

1.  $x^4 + 5x^2 - 6x$  en 0 et en  $+\infty$ .

3.  $x + \sin(x)$  en 0 et  $+\infty$ .

2.  $\sqrt{x} + \ln(x)$  en 0 et  $+\infty$ .

4.  $x^7 + \sqrt{x} + \ln(x)^2 + e^{2x} + 4x^5 + 9^{x-1}$  en  $+\infty$ .

**Exercice 25.** Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1.  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ .

4.  $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

2.  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + 2x$ .

5.  $e^{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$ .

3.  $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 0$ .

6.  $e^{x^2} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

### Les développements limités (surtout en 0)

On rappelle la formule de Taylor-Young. Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^n$  sur l'intervalle ouvert  $I$  et soit  $a \in I$ . Alors pour tout  $x \in I$ , on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n).$$

Si  $a = 0$ , on en obtient en particulier :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Si la fonction  $f$  s'exprime sous la forme d'une fraction dont le dénominateur s'annule en  $x = 0$ , comme  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , on effectue le développement au numérateur et au dénominateur séparément dans un premier temps et on simplifie ensuite par la puissance commune maximale de  $x$ . Dans le cas où il ne reste plus de terme singulier (comme  $\frac{1}{x}$ ) dans l'expression simplifiée ainsi obtenue, on a simultanément prouvé l'existence d'un prolongement continu en 0 pour  $f$  et obtenu le développement limité autour de 0 dudit prolongement (ce qui fournit en particulier la valeur en 0 du prolongement continu). Dans l'exemple, on a  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)$ , où 1 est la valeur de  $f$  obtenue par un tel prolongement.

**Exercice 26.** Donner par un calcul direct puis en utilisant le formulaire un développement limité en 0 à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

1.  $\ln(3 \cos(x))$ .

2.  $\sqrt{1 + \exp(2x)}$ .

**Exercice 27.** Donner par un calcul direct le développement limité en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes :

1.  $3 + \ln(1 + x + x^2)$ .

2.  $\exp(\cosh(x))$ .

3.  $1 + \tan(x)$ .

**Exercice 28.** Résoudre l'exercice précédent en utilisant le formulaire.

**Exercice 29.** Donner par un calcul direct puis en utilisant le formulaire le développement limité en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes :

1.  $\ln(1+x)\sin(x)$ .
2.  $\ln(1+\sin(x))$ .
3.  $\frac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)}$ .

**Exercice 30.** En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1.  $\ln(1+x)\sin(x)$ .
2.  $\ln(1+\sin(x))$ .
3.  $\frac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)}$ .

**Exercice 31.** En utilisant le formulaire, donner le développement limité à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

1.  $\ln(1+x)\cos(x)$ .
2.  $\ln(1+\cos(x))$ .
3.  $\frac{\cos(x)}{1+\ln(1+x)}$ .

**Exercice 32.** En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes :

1.  $\ln(2+x)$ .
2.  $\frac{1}{2+x}$ .
3.  $\sqrt{2+x}$ .

**Exercice 33.** (CF 2024)

1. En utilisant la définition et en détaillant bien toutes les étapes de votre calcul, calculer le développement limité de  $\sin(x)$  à l'ordre 3 autour de 0.
2. En utilisant le point 2, calculer le développement limité de  $\sin(x^2)$  à l'ordre 6 autour de 0.
3. En utilisant le point 2, calculer le développement limité de  $(\sin(x))^2$  à l'ordre 4 autour de 0.
4. En déduire la valeur de la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - (\sin(x))^2}{x^4},$$

si elle existe. (Si vous n'avez pas su répondre aux points qui précèdent, vous pouvez également calculer cette limite à l'aide d'une autre méthode de votre choix.)

**Exercice 34.** (CF2 2024)

1. Rappeler ou déterminer le développement limité de la fonction  $\frac{1}{1-x}$  à l'ordre 2 autour de 0.
2. En utilisant le point 2, calculer le développement limité de  $\frac{1}{1+x^2}$  à l'ordre 4 autour de 0.
3. Donner le développement limité de  $\cos(2x)$  à l'ordre 4 autour de 0.
4. En déduire le développement limité de

$$\frac{\cos(2x)}{1+x^2}$$

à l'ordre 4 autour de 0.

**Exercice 35.** En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes :

1.  $\ln(3-x)$ .
2.  $\frac{1}{3+x}$ .
3.  $\sqrt{4+x}$ .

**Exercice 36.** En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

1.  $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ .
2.  $\frac{\sin(x) - x}{x^3}$ .
3.  $\frac{\ln(1+x)}{e^x \sin(x)}$ .
4.  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ .

**Exercice 37.** En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

1.  $(1-x)^4$ .
2.  $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ .
3.  $\frac{\ln(1+x)}{e^x \cos(x)}$ .
4.  $(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

**Exercice 38.**

1. Déterminer la limite suivante,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2 + \sin(2x)},$$

une fois en appliquant la règle de l'Hôpital et une fois en utilisant le développement limité.

2. Également pour  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin(x)}{x^2 + \sin(2x)}$ .

(Il faut faire attention à comment on utilise de l'Hôpital dans ce cas).

**Exercice 39.** Calculer les limites suivantes en utilisant un développement limité :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \ln(1 + \sin(x))}{x^2}$ .

**Exercice 40.** En utilisant un développement limité, trouver les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(2x)}$ .

**Exercice 41.** Si elles existent, calculer les limites suivantes en utilisant un développement limité :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{\ln(1 + \sin(x)) - x}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x)^4} \left( \sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin(x)}{1 + \sin(x)} \right)$ .

**Exercice 42.** (CF2 2023) Le but de cet exercice est de déterminer le développement limité (DL) en 0 à l'ordre 3 de la fonction

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{\ln(2 \cos(x))}.$$

- a) Déterminer le DL en 0 à l'ordre 2 de la fonction

$$f(x) = \ln(2 \cos(x)).$$

- b) Déterminer le DL en 0 à l'ordre 3 de la fonction  $F(x)$ .

*Indication:*

Utiliser le résultat de a). En particulier, il n'est pas nécessaire de trouver le DL à l'ordre 3 du dénominateur.

**Exercice\* 43.**

Considérer la fonction  $f: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{1/x} \sqrt{x^2 - 1}$ .

1. Montrer qu'au voisinage de  $+\infty$ , on a :

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

2. En déduire que la droite  $y = x + 1$  est asymptote au graphe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .

**Exercice\* 44.**

Considérer la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}$ .

1. Montrer qu'au voisinage de  $+\infty$ , on a :

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

2. En déduire que la droite  $y = x + \frac{1}{2}$  est asymptote au graphe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .

### Quelques applications de la formule de Taylor-Lagrange

On rappelle la formule de Taylor-Lagrange. Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^n$  telle que  $f^{(n+1)}$  existe sur  $]a, b[$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

**Exercice 45.**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , écrire la formule de Taylor-Lagrange pour  $\cos$  à l'ordre  $n$  entre 0 et  $x$ .
2. En déduire une valeur approchée de  $\cos\left(\frac{\pi}{32}\right)$  à  $10^{-5}$  près.

**Exercice 46.**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , écrire la formule de Taylor-Lagrange pour  $\sin$  à l'ordre  $n$  entre 0 et  $x$ .
2. En déduire une valeur approchée de  $\sin\left(\frac{\pi}{32}\right)$  à  $10^{-5}$  près.

**Exercice 47** (CF 2023).

1. Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$ ,

$$|\cos y - \cos x| \leq |y - x|.$$

2. En déduire que  $\cos(0.01) \geq 0.99$ .
3. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction  $\cos$  à l'ordre 3 entre 0 et  $x$ .
4. En déduire une valeur approchée de  $\cos(0.01)$  à  $10^{-8}$ .

**Exercice 48.** (CF 2024)

1. Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  compris entre 0 et 1, nous avons

$$|\exp x - \exp y| \leq 3|x - y|.$$

*Indication:* on rappelle que  $\exp 1 = e \leq 3$ .

2. En déduire que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$1 \leq \exp x \leq 1 + 3x.$$

- Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction  $\exp$  à l'ordre 3 entre 0 et  $x$ . (Il suffit de fournir la formule sans justification).
- En déduire une valeur approchée de  $\exp(0.02)$  à  $10^{-8}$  près.  
*Indication:* on pensera à utiliser le point 2 pour majorer le reste.

**Exercice 49** (CF 2025).

- Montrer que 1 est une approximation de  $\sqrt{1.0001}$  avec une erreur d'approximation inférieure à 0.00005.
- Rappeler ou déterminer le développement limité de la fonction

$$f(x) := \sqrt{1+x}$$

à l'ordre 2 autour de 0.

- Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction  $f$  à l'ordre 2 entre 0 et  $x > 0$ . (Il suffit de fournir la formule sans justification).
- En déduire une expression simple pour une valeur approchée de  $f(10^{-4}) - f(0)$  à  $\frac{1}{16}10^{-12}$  près. *Indication:* : on pensera à utiliser le point 3 pour majorer le reste.
- En déduire une expression simple pour une valeur approchée de  $\sqrt{10001}$  à  $\frac{1}{16}10^{-10}$  près.

**Exercice 50.**

On considère  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x)$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , écrire la formule de Taylor-Lagrange pour  $f$  à l'ordre  $n$  entre 0 et  $x$ .

*Indication:* Montrer, que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ .

- Montrer que, pour tout  $x > 0$ , on a :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

- En déduire une valeur approchée de  $\ln(1.003)$  à  $10^{-8}$  près.
- En utilisant la question 2, montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$ .

**Exercice 51.**

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , écrire la formule de Taylor-Lagrange pour  $\exp$  à l'ordre  $n$  entre 0 et 1.
- En déduire que pour  $n \geq 2$  :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$

- Montrer que  $e$  est irrationnel.

*Indication:* Supposer par l'absurde que  $e = \frac{p}{q}$  pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  et appliquer la question 2) pour un entier  $n$  bien choisi.

**Exercice\* 52.** Soit  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que  $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$  et  $f(1) = 1$ . Montrer que  $f''$  n'est pas majorée par 4.

**Exercice\* 53.** (Inégalité de Komolgorov) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . On suppose que  $f$  et  $f''$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$  et on note  $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$  et  $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$ .

- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $h > 0$ , on a

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2.$$

- En déduire que  $f'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2M_0M_2.$$

## Formulaire de développements limités

Les développements limités ci-dessous sont valables quand  $x$  tend vers 0 et uniquement dans ce cas.

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+1}) \text{ et même } O(x^{2n+2}))$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+2}) \text{ et même } O(x^{2n+3})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+1}) \text{ et même } O(x^{2n+2})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+2}) \text{ et même } O(x^{2n+3})) \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} (1+x)^a \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (a \text{ réel donné}) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} x^k + o(x^n) \text{ et en particulier } (1+x)^a \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + ax + o(x) \text{ et donc } \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \end{aligned}$$

.....

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{et même } o(x^{2n+2}) \text{ et même } O(x^{2n+3})) \end{aligned}$$

Les développements en 0 de Arcsin et de tan et th ne font pas partie du cours mais constituent une activité classique en classe préparatoire.

## Formulaire d'équivalents usuels

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \quad \ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$$

---


$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

---


$$\arccos(x) \underset{x \rightarrow 1, x < 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x},$$

---


$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x, \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \quad \sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

---


$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

## Les théorèmes de croissances comparées

$$\forall a > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}, x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(a^x)$$

$$\forall q > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}, n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(q^n)$$

$$\forall a \in ]0, 1[, \forall \alpha \in \mathbb{R}, a^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$$

$$\forall q \in ]0, 1[, \forall \alpha \in \mathbb{R}, q^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^\alpha)$$

$$\forall a > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}, a^x \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o(|x|^\alpha)$$

---


$$\forall a > 1, \forall \alpha > 0, \forall \beta \in \mathbb{R}, \log_a^\beta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$$

$$\forall a > 1, \forall \alpha > 0, \log_a^\beta(x) \underset{x \rightarrow 0, x > 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad (\text{ou encore } x^\alpha \log_a^\beta(x) \underset{x \rightarrow 0, x > 0}{\rightarrow} 0)$$

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$1 \ll \ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt[3]{n} \ll \sqrt{n} \ll n \ll n \ln(n) \ll n\sqrt{n} \ll n^2 \ll (1,01)^n \ll n! \ll n^n$$

et aussi,

$$1 \gg \frac{1}{\ln(\ln(n))} \gg \frac{1}{\ln(n)} \gg \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \gg \frac{1}{\sqrt{n}} \gg \frac{1}{n} \gg \frac{1}{n \ln(n)} \gg \frac{1}{n\sqrt{n}} \gg \frac{1}{n^2} \gg \frac{1}{(1,01)^n} \gg \frac{1}{n} \gg \frac{1}{n^n}$$