

Université Claude Bernard Lyon 1
Analyse2 INFO, printemps 2026

Fiche TD n°1
Intégration

Exercice : Très important. Fait pendant le SolEx.

Exercice : À préparer à l'avance chez vous, puis à discuter pendant le TD.

Exercice : À faire à la maison.

Exercice* : Pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cette UE.

Exercices de révision

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^3 x^2 dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$

9. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \cos x dx$

2. $\int_1^3 x^{-2} dx$

6. $\int_2^4 e^x dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 + \frac{\cos(2x)}{2} dx$

3. $\int_{-3}^{-1} x^{-1} dx$

7. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

11. $\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$

4. $\int_1^2 \sqrt{x} dx$

8. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

12. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Intégrations par parties

Exercice 2. En utilisant l'intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\pi/4} e^x \sin x dx$

3. $\int_1^2 \sin(\ln x) dx$

2. $\int_1^e x^2 \ln x dx$

4. $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$

Exercice 3. En utilisant l'intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 (x^2 + x - 1)e^x dx$ 2. $\int_0^{\pi/2} (x^2 - \frac{\pi x}{2} + 2) \cos x dx$ 3. $\int_1^2 x^3 \ln x dx$ 4. $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$

Exercice 4 (CCF 2022). Évaluer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx .$$

Changements de variables

Exercice 5. En effectuant un changement de variables, calculer :

1. Avec le changement de variable $u = \ln x$, calculer $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Avec le changement de variable $u = e^x$, calculer : $\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx$.

3. Avec le changement de variable $u = x^2$ (est-ce une bijection ?) calculer $\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x \cos x^2 dx$.

Exercice 6. Évaluer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{3 \cos x - 1} dx$$

Exercice 7. Posons les intégrales suivantes : $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ et $J = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

1. Calculer $I + J$
2. Calculer $I - J$
3. En déduire les valeurs de I et J

Exercice 8. En utilisant un changement de variable, évaluer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx$
2. $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$
3. $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1} dx$

Exercice 9. En utilisant un changement de variable, évaluer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$
2. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx$
3. $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln(x))}{x} dx$

Exercice 10. En utilisant un changement de variable, évaluer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$
2. $\int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$

Exercice 11. Soit $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue impaire. Montrer que

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Exercice 12. Évaluer l'intégrale suivante : $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

Exercice 13. Évaluer l'intégrale suivante $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} dx$.

Indication: Effectuer le CdV $x = \sin t$. L'utilisation de la formule $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Exercice 14. Évaluer l'intégrale suivante $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

Divers 1

Exercice 15. Calculer les intégrales suivantes :

1. $C(\alpha) = \int_0^{\alpha} \cos^2(x) dx$
2. $S(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sin^2(x) dx$

Pour la suite de l'exercice, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.

3. Montrer par un changement de variables que (W_n) peut aussi s'écrire $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$
4. En effectuant une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n-2} .
5. Calculer W_n en fonction de n et donner les valeurs de W_n pour $n \in [0, \dots, 3]$ en vérifiant que $W_2 = S(\frac{\pi}{2}) = C(\frac{\pi}{2})$.

Exercice 16. En utilisant l'intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \arctan(x) dx$
2. $\int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$

Indication : pour la deuxième on proposera d'utiliser $\frac{1}{2}(x^2+1)$ comme primitive de x .

Intégrales de fractions rationnelles

Exercice 17 (CC 2023).

1. Donner la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{X}{(X+1)(X-2)}.$$

2. Calculer

$$3 \int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x-2)} dx.$$

Exercice 18 (CF 2023).

1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}.$$

2. Donner toutes les primitives de la fonction $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x-1}{x^2(x^2+1)}$, c'est-à-dire, déterminer

$$\int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)} dx$$

pour $x \neq 0$.

Exercice 19 (CF 2025).

1. Factoriser le polynôme suivant (sur \mathbb{R}) :

$$P(X) = X^4 - 16.$$

Indication : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

2. Donner la décomposition en éléments simples (sur \mathbb{R}) de la fraction rationnelle $F(X) = -16/P(X)$, c.-à.-d. de la fonction

$$F(X) = \frac{-16}{X^4 - 16}.$$

3. Calculer l'intégrale I suivante :

$$I = - \int_{-1}^1 \frac{16}{x^4 - 16} dx.$$

Exercice 20 (CF 2022).

1. Factoriser sur \mathbb{R} le polynôme suivant.

$$P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$$

2. Donner la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction rationnelle suivante.

$$F(X) = \frac{3X+1}{X^3 - X^2 + X - 1}$$

3. Calculer

$$I = \int_2^3 F(x) dx.$$

Exercice 21. Évaluer les intégrales suivantes :

$$1. \int_1^2 \frac{2}{x(x+2)} dx \qquad 2. \int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^3} dx$$

Exercice 22 (CC 2022).

Le but de cet exercice est de déterminer

$$I = \int_{-5}^0 \frac{x^2 + 6x - 1}{x^3 + x^2 - 7x - 15} dx.$$

1. Factoriser $P(X) = X^3 + X^2 - 7X - 15$.
2. Décomposer $F(X) = \frac{X^2 + 6X - 1}{X^3 + X^2 - 7X - 15}$ en éléments simples.
3. Calculer I .
4. (Bonus) Réécrire le résultat obtenu au point précédent pour éliminer arctan.

Exercice 23. Évaluer les intégrales suivantes

$$1. \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx \qquad 3. \int_0^1 \frac{-x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$2. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x - 2}{x^3 + x} dx \qquad 4. \int_0^1 \frac{x^3 - 17x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx$$

Exercice 24. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_2^3 \frac{x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Exercice 25. Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_2^3 \frac{dx}{x(x^2 - 1)} \qquad 2. \int_2^3 \frac{x^4 + 1}{x(x - 1)^3} dx$$

Exercice 26. Soit, $f(x):]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x - 1)(x + 3)^2}$. Trouver toutes les primitives de f .

Exercice 27. (CC1 2025)

1. Déterminer $F(x) := \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$.
2. En déduire $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$ et $J = \int_{-\frac{8}{7}}^{-\frac{1}{8}} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$.

Indication : on pourra se servir du fait que $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan(\frac{a-b}{1+ab})$, $\forall a, b \in]-1, 1[$.

Divers 2

Exercice 28. Évaluer $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$.

Exercice 29 (CF 2023). Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_1^2 x^3 \ln x dx; \qquad 2. \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx.$$

Exercice 30 (CC 2022). Évaluer l'intégrale suivante : $\int_0^1 e^x(3x^2 - x + 1) dx$.

Exercice 31. Évaluer l'intégrale suivante : $\int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^x + 1} dx$

Exercice 32 (CC 2023). Calculer

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Indication : Utiliser le changement de variable $x = \sin u$.

Exercice 33 (CF₂ 2024).

1. Factoriser le polynôme

$$P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$$

en polynômes irréductibles sur \mathbb{R} .

Indication : Trouver d'abord une racine de P .

2. Donner la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{X^2 - X - 2}{X^3 - X^2 + X - 1}.$$

3. Calculer (et simplifier)

$$I = \int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1} dx.$$

Exercice 34 (CC1 2025).

Trouver toutes les primitives $I(x)$, une fois avec une intégration partielle, une fois avec une substitution de variable.

$$I(x) = \int \sin^3 x dx.$$

Exercice 35 (CC1 2025).

Calculer l'intégrale suivante

$$J = \int_0^1 \frac{4}{x^2 - 4} dx.$$

Intégration à l'aide de la définition initiale

Exercice* 36. On considère la fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$.

1. Sans faire de calcul, et grâce à des considérations géométriques, montrer que

$$\int_0^1 f(x) dx = 1/2.$$

2. On se propose de retrouver ce résultat en faisant appel à la définition de l'intégrale de Riemann. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions en escalier u_n et v_n sur $[0, 1]$ par

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[, \quad u_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n(x) = f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

et $u_n(1) = v_n(1) = 1$. Faire un dessin des fonctions f , u_n et v_n . Montrer que, par définition de l'intégrale de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n}.$$

3. En faisant tendre n vers $+\infty$, en conclure que $\int_0^1 f(x) dx = 1/2$
4. Finalement, retrouver le résultat encore une fois en faisant appel au théorème fondamental de l'analyse.

Formulaire : Dérivées et primitives Usuelles

f' désigne la dérivée de f sur l'ensemble de dérivabilité D .

$f(x)$	$f'(x)$	D	$(f \circ u)'$
C	0	\mathbb{R}	
x^a ($a \in \mathbb{R}$)	ax^{a-1}	\mathbb{R} si $a \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}^* si $a \in \mathbb{Z}^-$, \mathbb{R}_+^* sinon.	$(u^a)' = u' \times au^{a-1}$
dont : $\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}_+^*	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^x	e^x	\mathbb{R}	$(e^{u'})' = u' e^u$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}_+^*	$\ln(u)' = \frac{u'}{u}$
$\cos x$	$-\sin x$	\mathbb{R}	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$\sin x$	$\cos x$	\mathbb{R}	$(\sin u)' = u' \cos u$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	\mathbb{R}	$(\operatorname{ch} u)' = u' \operatorname{sh} u$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	\mathbb{R}	$(\operatorname{sh} u)' = u' \operatorname{ch} u$
$\operatorname{th} x$	$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	\mathbb{R}	$(\operatorname{th} u)' = u'(1 - \operatorname{th}^2 u) = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$
Arctan x	$\frac{1}{x^2 + 1}$	\mathbb{R}	$(\operatorname{Arctan} u)' = \frac{u'}{u^2 + 1}$
Arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$	$(\operatorname{Arcsin} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$	$(\operatorname{Arccos} u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

F désigne une primitive de f sur l'intervalle I .
 C désigne une constante (qui DÉPEND de I).

$f(x)$	$F(x)$	I
x^a ($a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	\mathbb{R} si $a \in \mathbb{N}$, \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_+^- si $a \in \mathbb{Z}^-$, \mathbb{R}_+^* sinon.
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_+^-
e^{ax} ($a \in \mathbb{C}^*$)	$\frac{1}{a} e^{ax} + C$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x + C$	\mathbb{R}
$\sin x$	$-\cos x + C$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\cos^2 x}$ ou $1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$	\mathbb{R}
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ ou $1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x + C$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\operatorname{Arctan} x + C$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x + C$ ou $-\operatorname{Arccos} x + C$	$] -1, 1[$

Se souvenir que

- si u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I , une primitive de $f = u' \times v'$ (u) est $F = v \circ u + C$.
- $\int u'v = uv - \int uv'$ (intégration par parties).
- Si φ est de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I , en notant $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ et $\int f(x)dx = \int \varphi'(t)f(\varphi(t))dt$ (changement de variable).