

Session 2 - 26 juin 2026

DURÉE : 90 MINUTES

Avertissement : *Tout appareil électronique et toute communication pendant l'examen sont interdits. Toute réponse doit être justifiée, sauf indication contraire. Les exercices totalisent 30 points, vous permettant de composer au choix pour obtenir la note maximale 20/20 (note plafonnée). Vous pouvez résoudre les exercices dans l'ordre qui vous convient le mieux.*

Exercice 1. (D.E.S. et intégration)

(7 points)

1. (3.5 pts) Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}.$$

2. (3.5 pts) Donner toutes les primitives de la fonction $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x-1}{x^2(x^2+1)}$, c'est-à-dire déterminer

$$\int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)} dx$$

pour $x \neq 0$.

Solution 1

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{1-X}{X^2+1} + \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2}, \quad \int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)} dx = \arctan x + \ln \left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \right) + \frac{1}{x} + C_{\pm}.$$

Exercice 2. (Équation différentielle d'ordre 2)

(7 points)

Dans cet exercice, nous nous proposons de résoudre l'équation différentielle suivante avec les conditions initiales $y(0) = 6$ et $y'(0) = 1$:

$$y'' - 4y' + 13y = 52e^x \cos(2x).$$

- a) (2 pts) Déterminer la solution générale y_h du problème homogène associé, c.-à-d. de l'équation

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

- b) (3 pts) Trouver une solution particulière y_p de l'équation complète :

$$y'' - 4y' + 13y = 52e^x \cos(2x).$$

Indication : On pourra remarquer que $52e^x \cos(2x) = \Re(52e^{(1+2i)x})$

- c) (2 pts) En déduire la solution unique y du problème initial.

Solution 2

$$y_h(x) = e^{2x}(A \cos(3x) + B \sin(3x)) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

$$y_p(x) = e^x(6 \cos(2x) - 4 \sin(2x))$$

$$y(x) = e^{2x} \sin(3x) + e^x(6 \cos(2x) - 4 \sin(2x))$$

Exercice 3. (Dérivabilité)**(4 points)**

Déterminer les valeurs de $A, B \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(2x) & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ A \arctan(x - \frac{1}{2}) + B & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

soit de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Solution 3 $A = 1, \quad B = \frac{\pi}{4}$

Exercice 4. (Développement limité)**(5 points)**

1. (1 pt) Rappeler le développement limité de la fonction $g(x) := \cos x - 1$ à l'ordre 4 autour de 0.
2. (2 pts) Rappeler le développement limité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 2 autour de 0. En déduire celui de la fonction $f(x) := \ln(2+x)$ à l'ordre 2 autour de 0.
3. (2 pts) En déduire le développement limité de la fonction $h(x) := \ln(1+\cos x)$ à l'ordre 4 autour de 0, en remarquant que $h(x) = f(g(x))$.

Solution 4 $g(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad f(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2), \quad h(x) = \ln(2) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^4).$

Exercice 5. (Suite récurrente)**(7 points)**

Soit $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2}{x} + 1.$$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et par son premier terme $u_0 = 1$. On définit également la fonction g par $g(x) := f(f(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$.

1. (1.5 pt) Montrer que f est décroissante sur $[1, +\infty[$. En utilisant que $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$, déduire que g est croissante sur $[1, +\infty[$.
2. (1 pt) Montrer que l'intervalle $I = [1, 3]$ est stable par f et, en conséquence, aussi par g .
3. (2.5 pts) Simplifier l'expression pour la fonction g et trouver $l \in [1, 3]$ unique tel que $g(l) = l$. Montrer que ce l est aussi un point fixe de f .

Considérons maintenant les sous-suites paires $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et impaires $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$v_n := u_{2n}, \quad w_n := u_{2n+1}.$$

4. (1 pt) Montrer que $v_{n+1} = g(v_n)$ et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et bornée. Également pour $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Indication: Vous pouvez utiliser les résultats du cours en citant ce qui y a été démontré.
5. (1 pt) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution 5 $g(x) = \frac{3x+2}{x+2} \quad l = 2$