
Examen final - 4 mai 2026

DURÉE : 2H

Avertissement : *Tout appareil électronique et toute communication pendant l'examen sont interdits. Toute réponse doit être justifiée, sauf indication contraire. Le nombre de points obtenus constitue une note sur 20. Vous pouvez résoudre les exercices dans l'ordre qui vous convient le mieux.*

Exercice 1. (Décomposition en éléments simples et intégration) (5 points)

1. (1 pt) Factoriser le polynôme suivant (sur \mathbb{R}) :

$$P(X) = X^3 + X^2 + X + 1.$$

Indication : Commencer par trouver une racine évidente a , puis factoriser $P(X)$ par $X - a$.

2. (2 pts) Donner la décomposition en éléments simples (sur \mathbb{R}) de la fraction rationnelle $F(X) = -2X/P(X)$, c.-à.-d. de la fonction

$$F(X) = \frac{-2X}{X^3 + X^2 + X + 1}.$$

3. (2 pts) Calculer l'intégrale I suivante :

$$I = - \int_0^1 \frac{2x}{x^3 + x^2 + x + 1} dx.$$

Exercice 2. (Intégration et équation différentielle d'ordre 1) (6 points)

Le but de cet exercice est de trouver $y \in C^1(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ qui satisfait

$$\cos(x) y' - 2y = 2 \cos(x) + \sin(2x)$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$.

1. (1 pt) Résoudre l'intégrale suivante pour $x \in]-1, 1[$:

$$I(x) = \int_0^x \frac{2}{1-u^2} du.$$

2. (1 pt) Résoudre l'intégrale suivante pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$J(x) = \int_0^x \frac{2}{\cos(v)} dv.$$

Indication : On observe que $\frac{1}{\cos(v)} = \frac{\cos(v)}{1 - \sin^2(v)}$. Avec un changement de variable, déduire J du résultat pour I .

3. (1.5 pt) Trouver la solution générale de

$$\cos(x) y' - 2y = 0$$

pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

4. (1.5 pt) Trouver une solution particulière de

$$\cos(x) y' - 2y = 2 \cos(x) + \sin(2x)$$

pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Indication : Utiliser la méthode de variation de la constante.

5. (1 pt) Conclure.

Exercice 3. (Équation différentielle et suite récurrente, toutes deux d'ordre 2) (6 points)

Le but de cet exercice est, d'une part, de résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + 4y(x) = 0, \quad \text{avec } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0 \quad (1)$$

et, d'autre part, d'étudier la suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n, \quad \text{avec } u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 0. \quad (2)$$

1. (2 pts) Trouver les deux solutions λ_+ et λ_- de l'équation quadratique

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0,$$

à la fois en coordonnées cartésiennes et polaires ; en d'autres termes, déterminer les constantes réelles a, b, r et θ telles que

$$\lambda_{\pm} = a \pm ib = re^{\pm i\theta}.$$

2. (1 pt) Quelle est la solution générale de l'équation (1) ?
3. (1 pt) Spécialiser la solution générale à celle qui satisfait les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
4. (1 pt) Quelle est la solution générale de l'équation (2) ?
5. (1 pt) Spécialiser la solution générale à celle qui satisfait les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

Exercice 4. (Dérivabilité)

(3 points)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On admet que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .

1. (0.5 pt) Montrer que $f \in C^0(\mathbb{R})$.
2. (1 pt) La fonction f , est-elle dérivable en 0 ?
Indication: Utiliser la définition de la dérivabilité d'une fonction.
3. (1.5 pt) A-t-on $f \in D^1(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer f' sur \mathbb{R} . (Spécifier en particulier $f'(0)$).
A-t-on $f \in C^1(\mathbb{R})$?

Exercice 5. (TAF, développement limité et Taylor-Lagrange)

(5 points)

1. (1 pt) Montrer que pour tout $x > 0$, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Indication : on pourra utiliser le Théorème des Accroissements Finis pour encadrer $\ln(1+x)$.

2. (1 pt) En utilisant l'encadrement précédent, montrer que $0 < x - \ln(1+x) < x^2$ pour tout $x > 0$.
En déduire que 0,01 est une approximation de $\ln(1,01)$ avec une erreur inférieure à 10^{-4} .
3. (1 pt) Rappeler le développement limité de la fonction $f(x) := \ln(1+x)$ à l'ordre 2 autour de 0.
4. (1 pt) Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f à l'ordre 2 entre 0 et $x > 0$.
5. (1 pt) En déduire une expression simple pour une valeur approchée de $\ln(1,01)$ à 10^{-6} près.

Exercice 6. (Suite récurrente)**(4 points)**Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2.$$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et par son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$.

1. (1 pt) Déterminer l'ensemble des points fixes de f sur \mathbb{R} .
2. (0.5 pt) Montrer que $I = [0, 1]$ est stable par rapport à f .
3. (1 pt) Montrer qu'il y a une constante $k \in]0, 1[$ telle que $\forall x, y \in I$:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

4. (1.5 pt) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite l que l'on déterminera.