
Contrôle Partiel du Mardi 16 mars 2026
CORRECTION

Exercice 1 **Intégration habituelle**
Soit
$$I = \int_0^{\pi/6} e^{2\,x}\,\sin(3\,x)\,dx.$$
Première solution : On intègre par partie. On pose
$$\begin{array}{ll} u'(x) = e^{2\,x}, & u(x) = \dfrac{e^{2\,x}}{2}, \\ v(x) = \sin(3\,x), & v'(x) = 3\,\cos(3\,x). \end{array}$$
Alors
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/6} u'(x)\,v(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} u(x)\,v'(x)\,dx, \\ &= \left[\frac{e^{2\,x}}{2}\,\sin(3\,x)\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} \frac{e^{2\,x}}{2}\,3\,\cos(3\,x)\,dx, \\ &= \left(\frac{e^{2\,\pi/6}}{2}\,\sin(3\,\pi/6) - \frac{e^0}{2}\,\sin(0)\right) - \frac{3}{2}\int_0^{\pi/6} e^{2\,x}\,\cos(3\,x)\,dx, \\ &= \frac{e^{\pi/3}}{2}\,\sin(\pi/2) - \frac{3}{2}\int_0^{\pi/6} e^{2\,x}\,\cos(3\,x)\,dx = \frac{e^{\pi/3}}{2} - \frac{3}{2}\int_0^{\pi/6} e^{2\,x}\,\cos(3\,x)\,dx, \end{aligned}$$
car $\sin(0) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$.
On intègre à nouveau partie, on pose
$$\begin{array}{ll} u'(x) = e^{2\,x}, & u(x) = \dfrac{e^{2\,x}}{2}, \\ v(x) = \cos(3\,x), & v'(x) = -3\,\sin(3\,x). \end{array}$$
On obtient
$$\begin{aligned} I &= \frac{e^{\pi/3}}{2} - \frac{3}{2}\left(\left[\frac{e^{2\,x}}{2}\,\cos(3\,x)\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} \frac{e^{2\,x}}{2}\,\Big(-3\,\sin(3\,x)\Big)\,dx\right), \\ &= \frac{e^{\pi/3}}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{e^{\pi/3}}{2}\,\cos(\pi/2) - \frac{e^0}{2}\,\cos(0)\right) - \frac{9}{4}\int_0^{\pi/6} e^{2\,x}\,\sin(3\,x)\,dx, \\ &= \frac{e^{\pi/3}}{2} + \frac{3}{4} - \frac{9}{4}\,I, \end{aligned}$$
car $\cos(\pi/2) = 0$ et $\cos(0) = 1$.
Ainsi
$$I = \frac{2\,e^{\pi/3} + 3}{4} - \frac{9}{4}\,I \quad \Leftrightarrow \quad I + \frac{9}{4}\,I = \frac{4+9}{4}\,I = \frac{13}{4}\,I = \frac{2\,e^{\pi/3} + 3}{4}.$$
Et donc
$$I = \frac{2\,e^{\pi/3} + 3}{13}.$$
Deuxième solution : On intègre par partie. On pose
$$\begin{array}{ll} u'(x) = \sin(3\,x), & u(x) = \dfrac{-\cos(3\,x)}{3}, \\ v(x) = e^{2\,x}, & v'(x) = 2\,e^{2\,x}. \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \left[-e^{2\,x}\,\frac{\cos(3\,x)}{3}\right]_0^{\pi/6} + \int_0^{\pi/6} 2\,e^{2\,x}\,\frac{\cos(3\,x)}{3}\,dx, \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_0^{\pi/6} e^{2\,x}\,\cos(3\,x)\,dx, \end{aligned}$$

car $\cos(\pi/2) = 0$ et $\cos(0) = 1$.

On intègre à nouveau partie, on pose

$$\begin{aligned} u'(x) &= \cos(3\,x), \quad & u(x) &= \frac{\sin(3\,x)}{3}, \\ v(x) &= e^{2\,x}, & v'(x) &= 2\,e^{2\,x}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\left[e^{2\,x}\,\frac{\sin(3\,x)}{3}\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} 2\,e^{2\,x}\,\frac{\sin(3\,x)}{3} dx\right), \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2\,e^{\pi/3}}{9} - \frac{4}{9}\,I, \end{aligned}$$

car $\sin(0) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$.

Ainsi

$$I = \frac{2\,e^{\pi/3}+3}{9} - \frac{4}{9}\,I \quad \Leftrightarrow \quad I + \frac{4}{9}\,I = \frac{9+4}{9}\,I = \frac{13}{9}\,I = \frac{2\,e^{\pi/3}+3}{9}.$$

Et donc

$$I = \frac{2\,e^{\pi/3}+3}{13}.$$

Troisième solution : On cherche une primitive de $e^{2\,x}\,\sin(3\,x)$ sous la forme $F(x) = e^{2\,x}\left(a\,\sin(3\,x) + b\,\cos(3\,x)\right)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F'(x) = e^{2\,x}\,\sin(3\,x) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\,e^{2\,x}\left(a\,\sin(3\,x) + b\,\cos(3\,x)\right) + e^{2\,x}\left(3\,a\,\cos(3\,x) - 3\,b\,\sin(3\,x)\right), \\ &\Leftrightarrow \quad e^{2\,x}\left(\left(2\,a - 3\,b\right)\,\sin(3\,x) + \left(2\,b + 3\,a\right)\,\cos(3\,x)\right)\Big). \end{aligned}$$

On doit donc avoir

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,a - 3\,b = 1, \\ 2\,b + 3\,a = 0. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} b = -\dfrac{3}{2}\,a, \\ 2\,a + \dfrac{9}{2}\,a = 1. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{4+9}{2}\,a = 1, \\ b = -\dfrac{3}{2}\,a. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{2}{13}, \\ b = -\dfrac{3}{13}. \end{array}\right.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \left[e^{2\,x}\left(\frac{2}{13}\,\sin(3\,x) - \frac{3}{13}\,\cos(3\,x)\right)\right]_0^{\pi/6}, \\ &= e^{\pi/3}\left(\frac{2}{13}\,\sin(\pi/2) - \frac{3}{13}\,\cos(\pi/2)\right) - e^0\left(\frac{2}{13}\,\sin(0) - \frac{3}{13}\,\cos(0)\right), \\ &= \frac{2\,e^{\pi/3}}{13} + \frac{3}{13}, \end{aligned}$$

car $\sin(\pi/2) = \cos(0) = 1$ et $\sin(0) = \cos(\pi/2) = 0$.

On obtient donc

$$I = \frac{2\,e^{\pi/3}+3}{13}.$$

Exercice 2 **Changements de variable**

On pose $x = \sin t$ et on remarque que la fonction $t \mapsto \sin t$ est bijective sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. Ainsi, si $x = 0$, alors $t = 0$ et si $x = \frac{1}{2}$ alors on prend $t = \frac{\pi}{6}$ pour que le changement de variable soit bijectif. De plus, on a $dx = \cos t dt$ et ainsi :

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)^{\frac{5}{2}}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{(\cos^2 t)^{\frac{5}{2}}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^4 t} dt.$$

On remarque maintenant que, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$,

$$\frac{1}{\cos^4 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \times \frac{1}{\cos^2 t} = \tan'(t)\left(1 + \tan^2 t\right).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan'(t)\left(1+\tan^2 t\right) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan'(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan'(t) \tan^2 t dt \\ &= [\tan t]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3}\left[\tan^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \\ &= \frac{10}{9\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

<u>Alternativement :</u> on pouvait poser $u = \tan t$ avec $t \mapsto \tan t$ bijective sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, avec $du = \tan' t dt$, $u = 0$ si $t = 0$ et $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$ si $x = \frac{\pi}{6}$. On obtient alors $J = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1+u^2) du$ et la fin du calcul est la même.

Exercice 3 **Décomposition en éléments simples**

1. La décomposition en éléments simples de $F(x)$ s'écrit

$$F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+2}.$$

On a donc

$$\frac{2X+1}{X(X-1)(X+2)} = \frac{a(X-1)(X+2) + bX(X+2) + cX(X-1)}{X(X-1)(X+2)}.$$

Et ainsi

$$2X+1 = a(X-1)(X+2) + bX(X+2) + cX(X-1).$$

On choisit $X = 0$, on obtient

$$1 = -2a \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2}.$$

On choisit $X = 1$, on obtient

$$3 = 3b \quad \Leftrightarrow \quad b = 1.$$

On choisit $X = -2$, on obtient

$$-3 = 6c \quad \Leftrightarrow \quad c = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$F(X) = -\frac{1}{2}\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{X+2}.$$

2. On a

$$\begin{aligned}
K &= \int_2^4 \frac{2\,x+1}{x\,(x-1)\,(x+2)}\,dx = \int_2^4 \left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+2}\right)\,dx,\\
&= \left[-\frac{1}{2}\,\ln(|x|)+\ln(|x-1|)-\frac{1}{2}\,\ln(|x+2|)\right]_2^4,\\
&= -\frac{1}{2}\,\ln(4)+\ln(3)-\frac{1}{2}\,\ln(6)-\left(-\frac{1}{2}\,\ln(2)+\ln(1)-\frac{1}{2}\,\ln(4)\right),\\
&= \ln(3)-\frac{1}{2}\,\Big(\ln(3)+\ln(2)\Big)+\frac{1}{2}\,\ln(2)=\ln(3)-\frac{1}{2}\,\ln(3).
\end{aligned}$$

Et donc

$$K=\frac{1}{2}\,\ln(3)=\ln(\sqrt{3}).$$

Exercice 4 **Équation différentielle du premier ordre**

On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$y'-\frac{2}{x}y=x^2 \tag{1}$$

sur $]0,+\infty[$ vérifiant la condition initiale $y(1)=2$.

On commence par résoudre l'équation homogène $y'-\frac{2}{x}y=0$ avec $y\in C^1(]0,+\infty[)$. On a, pour tout $x>0$,

$$y'-\frac{2}{x}y=0 \iff y'=\frac{2}{x}y.$$

Une primitive de $x\mapsto\frac{2}{x}$ est $x\mapsto 2\ln x$ et la solution générale est donc donnée, pour tout $x>0$, par

$$y_h(x)=\lambda e^{2\ln x}=\lambda x^2,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

On cherche maintenant une solution particulière de l'équation (1) sous la forme $y_P(x)=\lambda(x)x^2$ avec $\lambda\in C^1(]0,+\infty[)$. On obtient

$$\forall x>0,\quad y_P'(x)=\lambda'(x)x^2+2\lambda(x)x,$$

et donc, en remplaçant dans (1), on obtient, pour tout $x>0$,

$$y_P'(x)-\frac{2}{x}y_P(x)=x^2 \iff \lambda'(x)x^2+2\lambda(x)x-\frac{2}{x}\lambda(x)x^2=x^2 \iff \lambda'(x)x^2=x^2 \iff \lambda'(x)=1.$$

On choisit ainsi $\lambda(x)=x$ et donc $y_P(x)=\lambda(x)x^2=x^3$ convient.

Finalement, la solution générale de l'équation (1) est donnée, pour tout $x>0$, par

$$y(x)=y_h(x)+y_P(x)=\lambda x^2+x^3.$$

La condition initiale nous donne $2=y(1)=\lambda+1$, d'où l'unique solution de l'équation définie pour tout $x>0$ par

$$y(x)=x^2+x^3.$$

Exercice 5 **BONUS**

1)

$$y'' + 5y' + 4y = 10e^x \tag{E_5}$$

Les solutions de (E_5) sont de la forme :

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y_p(x) + y_h(x) \end{aligned}$$

où y_h est solution de l'équation homogène associée à (E_5). et y_p est une solution de l'équation particulière de (E_5).

L'équation homogène associée est :

$$y'' + 5y' + 4y = 0. \tag{E_H}$$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + 5r + 4 = 0. \tag{E_c}$$

Résolution de l'équation homogène (E_H) :

Pour trouver les solutions de l'équation homogène, on recherche les solutions de (E_c).

Pour cela, on calcule le discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$.

(E_c) a donc deux solutions : $r_0 = \frac{-5+\sqrt{9}}{2\cdot 1} = -1$ et $r_1 = \frac{-5-\sqrt{9}}{2\cdot 1} = -4$.

Ainsi, d'après le cours, comme $\Delta > 0$, les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$y_h : x \mapsto Ae^{-4x} + Be^{-x} \ ; \ A, B \in \mathbb{R}$$

Solution particulière de (E_5) :

Cherchons une solution particulière de (E_5) sous la forme $y_p : x \mapsto Ce^x \ ; \ C \in \mathbb{R}$. Ici, la variable que l'on souhaite détérminer est C. Pour cela, on utilise le fait que y_p est une solution particulière de (E_5). Ainsi, en remplaçant, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_p''(x) + 5y_p'(x) + 4y_p(x) = 10e^x &\Leftrightarrow Ce^x + 5Ce^x + 4Ce^x = 10e^x \\ &\Leftrightarrow (C + 5C + 4C)e^x = 10e^x \\ &\Leftrightarrow 10Ce^x = 10e^x \\ &\Leftrightarrow 10C = 10 \qquad (\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow C = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière de (E_5) est $y_p : x \mapsto e^x$.

Les solutions de (E_5)

Finalement, les solutions de (E_5) sont de la forme :

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x + Ae^{-4x} + Be^{-x} \ ; \ A, B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2)

$$y'' + 4y = 10e^x \tag{E_0}$$

Les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y_p(x) + y_h(x). \end{aligned}$$

où y_h est solution de l'équation homogène associée à (E_0) et y_p est une solution de l'équation particulière de (E_0).

L'équation homogène associée est :

$$y'' + 4y = 0 \tag{E_H}$$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + 4 = 0 \tag{E_c}$$

Résolution de l'équation homogène (E_H) :

Pour trouver les solutions de l'équation homogène, on recherche les solutions de (E_c).

Pour cela, on calcule le discriminant $\Delta = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16$. (E_c) n'a donc pas de solution dans $\mathbb{R}$ mais a deux solutions dans $\mathbb{C}$. Ces solution sont : $r_0 = -2i$ et $r_1 = 2i$ qui peuvent s'écrire $r_0 = \alpha + i\beta$ et $r_1 = \alpha - i\beta$ avec $\alpha = 0$ et $\beta = 2$.

Ainsi, d'après le cours, comme $\Delta < 0$, les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y_h : x \mapsto Ae^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))\ ;\ A, B \in \mathbb{R}$$

,

c'est à dire

$$y_h : x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x))\ ;\ A, B \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière de (E_0) :

Cherchons une solution particulière de (E_0) sous la forme $y_p : x \mapsto Ce^x\ ;\ C \in \mathbb{R}$. Ici, la variable que l'on souhaite détérminer est C. Pour cela, on utilise le fait que y_p est une solution particulière de (E_5).

Ainsi, en remplaçant, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_p''(x) + 4y_p(x) = 10e^x &\Leftrightarrow Ce^x + 4Ce^x = 10e^x \\ &\Leftrightarrow (C + 4C)e^x = 10e^x \\ &\Leftrightarrow 5Ce^x = 10e^x \\ &\Leftrightarrow 5C = 10 \qquad (\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow C = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière de (E_0) est $y_p : x \mapsto 2e^x$.

Les solutions de (E_0)

Finalement, les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2e^x + A\cos(2x) + B\sin(2x)\ ;\ A, B \in \mathbb{R} \end{aligned}$$