

Corrigé de l'examen final du 4 mai 2026

Correction Exercice 1

1) On remarque que $a = -1$ est racine de P , *i.e.*

$$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0.$$

On en déduit donc que P peut se factoriser sous la forme

$$P(X) = (X + 1)(aX^2 + bX + c)$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ceci donne :

$$P(X) = aX^3 + X^2(a + b) + X(b + c) + c$$

d'où par identification $a = c = 1$ et $b = 0$, *i.e.*

$$P(X) = (X + 1)(X^2 + 1).$$

$X^2 + 1$ n'ayant pas de racine réelle, ceci est la factorisation complète sur \mathbb{R} .

2) Par la décomposition en éléments simples, il existe $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{-2X}{P(X)} = \frac{A}{X + 1} + \frac{BX + C}{X^2 + 1}.$$

En mettant tout en même dénominateur, on arrive à :

$$-2X = A(X^2 + 1) + (BX + C)(X + 1) = X^2(A + B) + X(B + C) + A + C$$

d'où par identification

$$A + B = 0,$$

$$B + C = -2,$$

et

$$A + C = 0.$$

Ceci donne après résolution du système $A = 1$ et $B = C = -1$.

On peut aussi, plus simplement, multiplier l'équation initiale par $X + 1$ puis remplacer X par -1 pour obtenir directement $A = 1$, ou la multiplier par $X^2 + 1$ puis poser $X := i$ pour déterminer B et C à partir de $C + iB = \frac{-2i}{1+i}$. En tout cas, on obtient :

$$\frac{-2X}{P(X)} = \frac{1}{X + 1} - \frac{X + 1}{X^2 + 1}.$$

3) Pour calculer l'intégrale, on reconnaît d'abord que

$$I = \int_0^1 \frac{-2x}{P(x)} dx .$$

Avec la question précédente, on peut réécrire :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx .$$

Ces trois intégrales correspondent à des primitives usuelles :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \left[\ln(x+1) \right]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(1) = \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \left[\arctan(x) \right]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} .$$

Finalement, on a donc :

$$I = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{\pi}{4} .$$

Correction Exercice 2

1. Résoudre l'intégrale suivante pour $x \in]-1, 1[$:

$$I(x) = \int_0^x \frac{2}{1-u^2} du .$$

Correction : D.E.S. :

$$\frac{2}{1-X^2} = \frac{a}{1-X} + \frac{b}{1+X}$$

d'où on trouve $a = b = 1$. Une primitive de $\frac{1}{1+u}$ est donnée par $\ln(1+u)$ et de $\frac{1}{1-u}$ par $-\ln(1-u)$. Alors

$$I(x) = \left[\ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right) \right]_0^x = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) .$$

2. Résoudre l'intégrale suivante pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$J(x) = \int_0^x \frac{2}{\cos(v)} dv .$$

Correction :

$$J(x) = \int_0^x \frac{2 \cos(v)}{1 - \sin^2(v)} dv$$

Avec le changement de variable $t = \sin v$, qui donne $dt = \cos v dv$ et des nouvelles bornes 0 et $\sin x$, on trouve alors

$$J(x) = \int_0^{\sin x} \frac{2}{1 - t^2} dt = I(\sin x) = \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right).$$

3. Trouver la solution générale de

$$\cos(x) y' - 2y = 0$$

pour $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Correction : En divisant l'équation par $\cos x \neq 0$, on voit que l'on cherche une primitive $A(x)$ de $a(x) = -\frac{2}{\cos x}$. Alors, selon le point 2 ci-dessus, $A(x) = -J(x)$ et la solution générale de ce problème homogène est

$$y_h(x) = C \exp(-A(x)) = C \exp(J(x)) = C y_0(x)$$

$$\text{avec } y_0(x) \equiv \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \quad \text{et } C \in \mathbb{R}.$$

4. Trouver une solution particulière de

$$\cos(x) y' - 2y = 2 \cos(x) + \sin(2x) \tag{1}$$

pour $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Correction : Avec la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de la forme $y(x) = C(x) y_0(x)$. Selon un lemme du CM, ceci réduit l'équation [\(1\)](#) à

$$\cos(x) C' y_0 = 2 \cos(x) + \sin(2x) \quad \Leftrightarrow \quad C' \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = 2 + 2 \sin x$$

car $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$. En simplifiant, $C'(x) = 2(1 - \sin x)$ d'où on peut choisir $C(x) = 2(x + \cos x)$. Donc on a trouvé une solution particulière,

$$y_p(x) = (2x + 2 \cos x) \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$$

5. La solution générale de [\(1\)](#) est $y_h + y_p$, c'est-à-dire

$$y_{gen}(x) = (C + 2x + 2 \cos x) \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$$

Pour satisfaire la condition initiale $y(0) = 1$, il faut $C = -1$. Ainsi, la solution du problème initial de cet exercice est alors

$$y(x) = \frac{(2x + 2 \cos x - 1)(1 + \sin x)}{1 - \sin x}.$$

Exercice 3 (Équation différentielle et suite récurrente, toutes deux d'ordre 2)

1. L'équation $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$ admet les deux solutions complexes conjuguées :

$$\lambda_+ = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \lambda_- = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

2. Les solutions réelles de l'équation différentielle (1) sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$x \mapsto e^x (A_1 \cos(\sqrt{3}x) + A_2 \sin(\sqrt{3}x))$$

où A_1 et A_2 sont deux réels.

3. Soit y la solution réelle de (1) vérifiant les conditions : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Alors il existe deux réels A_1 et A_2 tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^x (A_1 \cos(\sqrt{3}x) + A_2 \sin(\sqrt{3}x))$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = e^x \left((A_1 + A_2\sqrt{3}) \cos(\sqrt{3}x) + (A_2 - A_1\sqrt{3}) \sin(\sqrt{3}x) \right)$$

Donc

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_1 + A_2\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^x \left(\cos(\sqrt{3}x) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}x) \right)$$

4. Les solutions réelles de l'équation récurrente (2) sont les suites définies sur \mathbb{N} par

$$n \mapsto 2^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \right)$$

où C_1 et C_2 sont deux réels.

5. Soit (u_n) la solution réelle de (2) vérifiant les conditions : $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

Alors il existe deux réels C_1 et C_2 tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \right)$$

Donc

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ 2 \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ 1 + C_2\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \right)$$

Correction Exercice 4

1. Puisque $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*) \subset C^0(\mathbb{R}^*)$, il reste à prouver que f est continue en zéro, c'est-à-dire que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ est égal à $f(0)$. (Je rappelle que dans ce cours, le symbole $\lim_{x \rightarrow a}$ exclut $x = a$). Mais, d'après le théorème des gendarmes (en utilisant que $0 \leq x^2 \cos(\frac{1}{x^2}) \leq x^2$), on trouve

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = 0,$$

ce qui est, par définition de la fonction f , précisément $f(0)$.

2. Pour déterminer si la fonction f est dérivable en zéro, il faut vérifier que la limite suivante existe :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right),$$

qui, là encore d'après le théorème des gendarmes, est égale à 0. La réponse est donc *oui*, et on constate également que $f'(0) = 0$.

3. Puisque $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*) \subset D^1(\mathbb{R}^*)$ et que f est dérivable en zéro, on a bien $f \in D^1(\mathbb{R})$ et f' est bien définie en tant que fonction sur \mathbb{R} . Comme $f'(0) = 0$ d'après le point 2, et puisque $(\cos(x^{-2}))' = -\sin(x^{-2}) \cdot (-2x^{-3}) = \frac{2}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on a

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En général, $f \in C^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f' \in C^0(\mathbb{R})$, mais le second terme de la fonction f' pour $x \neq 0$ n'admet pas de limite en zéro. Ainsi, f' n'est pas continue en zéro et, par conséquent, $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

Correction Exercice 5

1) Montrer que pour tout $x > 0$, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Correction : On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \ln(1+x) \end{cases}$ fonction continue et dérivable sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, pour $x > 0$, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0).$$

Or, $f'(c) = \frac{1}{1+c}$ et $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$, donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x}(x-0) &< f(x) - f(0) < 1(x-0) \\ \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} &< \ln(1+x) < x. \end{aligned}$$

2) En utilisant l'encadrement précédent, montrer que $0 < x - \ln(1+x) < x^2$ pour tout $x > 0$. En déduire que 0,01 est une approximation de $\ln(0,01)$ avec une erreur inférieure à 10^{-4} .

Correction : Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x} &< \ln(1+x) < x \\ \Leftrightarrow -x &< -\ln(1+x) < -\frac{x}{1+x} \\ \Leftrightarrow x - x &< x - \ln(1+x) < x - \frac{x}{1+x} \\ \Leftrightarrow 0 &< x - \ln(1+x) < \frac{x + x^2 - x}{1+x} \\ \Leftrightarrow 0 &< x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{1+x} \\ \Leftrightarrow 0 &< x - \ln(1+x) < x^2. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque l'on applique à $x = 0,01$, on a

$$|0,01 - \ln(0,01)| < (0,01)^2 = 10^{-4}.$$

Ce qui prouve que 0,01 est une approximation de $\ln(0,01)$ avec une erreur inférieure à 10^{-4} .

3) Rappeler le développement limité de la fonction $f(x) := \ln(1+x)$ à l'ordre 2 autour de 0.

Correction : Le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 autour de 0 est donné pour $x > 0$ par

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

4) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f à l'ordre 2 entre 0 et $x > 0$.

Correction : La formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f à l'ordre 2 entre 0 et $x > 0$ est donnée par

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f^{(3)}(c) \quad \text{avec } c \in]0, x[.$$

Or, pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{et} \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

donc,

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}.$$

5) En déduire une expression simple pour une valeur approchée de $\ln(1,01)$ à 10^{-6} près.

Correction : On applique à $x = 0,01$,

$$\begin{aligned} \ln(1,01) &= 0,01 - 0,00005 + \frac{10^{-6}}{3(1+c)^3} \\ \ln(1,01) &= 0,00995 + \frac{10^{-6}}{3(1+c)^3}. \end{aligned}$$

On a donc

$$|\ln(1,01) - 0,00995| = \frac{10^{-6}}{3(1+c)^3},$$

et comme $c > 0$, $\frac{10^{-6}}{3(1+c)^3} < 10^{-6}$ et

$$|\ln(1,01) - 0,00995| < 10^{-6}.$$

Finalement, on obtient que 0,00995 est une approximation de $\ln(1,01)$ à 10^{-6} près.

Exercice 6 (Suite récurrente)

1. Les points fixes de la fonction f sont les solutions réelles de l'équation $f(x) = x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x-1)^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \text{ ou } x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right)$$

Donc les points fixes de f sont

$$\frac{5 - \sqrt{21}}{2} \text{ et } \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$$

2. On montre que l'intervalle $I = [0 ; 1]$ est stable par la fonction f .

a. Première méthode

- La fonction f est continue sur I .
- La fonction f est strictement décroissante sur I .

D'après le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) l'image de I par f est l'intervalle $[f(1); f(0)] = \left[0; \frac{1}{3}\right]$.

On a $\left[0; \frac{1}{3}\right] \subset [0; 1]$; donc l'intervalle I est stable par f .

b. Deuxième méthode

Soit $x \in I$; alors on a

$$\begin{aligned} -1 &\leq x - 1 \leq 0 \\ 0 &\leq (x - 1)^2 \leq 1 \\ 0 &\leq \frac{1}{3}(x - 1)^2 \leq \frac{1}{3} \\ f(x) &\in \left[0; \frac{1}{3}\right] \end{aligned}$$

On en déduit que $f(I) \subset \left[0; \frac{1}{3}\right] \subset I$.

3. La fonction f est dérivable sur I .

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{2}{3}(x - 1)$$

Donc

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| = \frac{2}{3}|x - 1| \leq \frac{2}{3}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis

$$\forall (x; y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{3}|x - y|$$

On a montré que la fonction f est contractante sur I .

4. On a

- $u_0 = \frac{1}{2} \in I$
- I est stable par f
- f est contractante sur I

On en déduit par le théorème des accroissements finis (TAF) que la suite (u_n) converge vers l'unique point fixe de f appartenant à I , c'est-à-dire $\frac{5 - \sqrt{21}}{2}$.